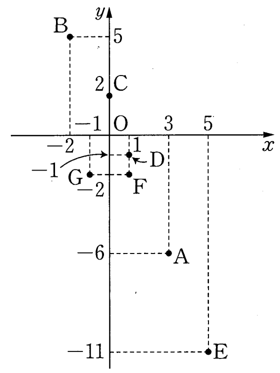
高校新演習プログレス　PROGRESS
数学Ⅲ　解答解説

第１講　複素数平面(1)

P.3〜P.4　類題

1



解説 (4)　$\alpha+\beta=1-i$

(5)　$\alpha-\beta=5-11i$

(6)　$\dfrac{1}{3}\alpha=1-2i$

(7)　$\alpha+2\beta-3\gamma=-1-2i$

2　$\boldsymbol{p=-4}$

解説　3点 0，α，β が一直線上にあるとき，

$\beta=k\alpha$（k は実数）とできるから

$p+4i=k(3-3i)$

$p+4i=3k-3ki$

p，k は実数であるから

$p=3k$，$4=-3k$

これを解いて　$k=-\dfrac{4}{3}$，$p=-4$

3　(1)　$\boldsymbol{-14}$　(2)　$\boldsymbol{48i}$　(3)　$\boldsymbol{\dfrac{6}{13}i}$

(4)　$\boldsymbol{\sqrt{61}}$　(5)　$\boldsymbol{5\sqrt{13}}$

解説 (1)　$\alpha+\overline{\alpha}=(3+4i)+(3-4i)=6$

$\alpha\overline{\alpha}=(3+4i)(3-4i)=9+16=25$ より

$\alpha^2+(\overline{\alpha})^2=(\alpha+\overline{\alpha})^2-2\alpha\overline{\alpha}$

$=6^2-2\times25=-14$

(2)　$\alpha-\overline{\alpha}=(3+4i)-(3-4i)=8i$ より

$\alpha^2-(\overline{\alpha})^2=(\alpha+\overline{\alpha})(\alpha-\overline{\alpha})$

$=6\times8i=48i$

(3)　$\beta-\overline{\beta}=(-2-3i)-(-2+3i)=-6i$

$\beta\overline{\beta}=(-2-3i)(-2+3i)=4+9=13$ より

$\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\overline{\beta}}=-\dfrac{\beta-\overline{\beta}}{\beta\overline{\beta}}$

$=-\dfrac{-6i}{13}=\dfrac{6}{13}i$

(4)　$3\alpha+2\beta=3(3+4i)+2(-2-3i)=5+6i$ より

$|3\alpha+2\beta|=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$

(5)　$\alpha\overline{\beta}=(3+4i)(-2+3i)=-18+i$ より

$|\alpha\overline{\beta}|=\sqrt{(-18)^2+1^2}=5\sqrt{13}$

(別解)

$|\alpha\overline{\beta}|=|\alpha||\beta|=\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}$

$=5\sqrt{13}$

4　**辺BCを斜辺とする直角二等辺三角形**

解説　$\mathrm{AB}=|\beta-\alpha|=|4-3i|$

$=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

$\mathrm{BC}=|\gamma-\beta|=|-1+7i|$

$=\sqrt{(-1)^2+7^2}=5\sqrt{2}$

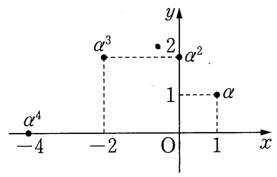
$\mathrm{CA}=|\alpha-\gamma|=|-3-4i|$

$=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$

よって，$\mathrm{AB}=\mathrm{CA}$，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2=\mathrm{BC}^2$ が成り立つから，三角形ABCは，辺BCを斜辺とする直角二等辺三角形である。

P.5　演習問題

1



解説　$\alpha=1+i$ より

$\alpha^2=(1+i)^2=2i$

$\alpha^3=\alpha^2\cdot\alpha=2i(1+i)=-2+2i$

$\alpha^4=(\alpha^2)^2=(2i)^2=-4$

となる。

2　(1)　$\boldsymbol{-2+3i}$

(2)　$\boldsymbol{5-3i}$

(3)　$\boldsymbol{6+9i}$

解説 (1)　求める複素数は

$-\overline{\alpha}=-(2-3i)=-2+3i$

(2)　求める複素数は

$\alpha+(3-6i)=(2+3i)+(3-6i)$

$=5-3i$

(3)　求める複素数は

$3\alpha=3(2+3i)=6+9i$

3　$\boldsymbol{(a,\ b)=(\pm2\sqrt{3},\ \mp\sqrt{3})}$　**(複号同順)**

解説　4点 0，α，β，γ が一直線上にあるとき

$\alpha=k\beta$，$\gamma=l\beta$　（k，l は実数）

とできる。

$\gamma=l\beta$ より

$8b+12i=l(2+bi)$

$8b+12i=2l+bli$

b，l は実数だから

$$\begin{cases} 8b=2l & \cdots\cdots① \\ 12=bl & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①より，$l=4b$

②に代入して，$12=4b^2 \qquad b=\pm\sqrt{3}$

よって，$l=\pm4\sqrt{3}$ （複号同順）

さらに，$\alpha=k\beta$ より

$a-3i=k(2+bi)$

$a-3i=2k+bki$

a，b，k は実数だから

$$\begin{cases} a=2k \\ -3=bk \end{cases}$$

よって，$b=\sqrt{3}$ のとき

$k=-\sqrt{3}$，$a=-2\sqrt{3}$

$b=-\sqrt{3}$ のとき

$k=\sqrt{3}$，$a=2\sqrt{3}$

以上より

$(a,\ b)=(\pm2\sqrt{3},\ \mp\sqrt{3})$ （複号同順）

4 (1) $\mathbf{-234}$

(2) $\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(3) $\mathbf{\dfrac{\sqrt{29}}{5}}$

解説 (1) $\alpha+\overline{\alpha}=(3-4i)+(3+4i)=6$

$\alpha\overline{\alpha}=(3-4i)(3+4i)=25$ より

$$\alpha^3+(\overline{\alpha})^3=(\alpha+\overline{\alpha})^3-3\alpha\overline{\alpha}(\alpha+\overline{\alpha})$$
$$=6^3-3\times25\times6$$
$$=-234$$

(2) $\dfrac{\overline{\beta}}{\alpha+1}=\dfrac{1-i}{4-4i}=\dfrac{1-i}{4(1-i)}=\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{\beta}{\overline{\alpha}+1}=\overline{\left(\dfrac{\overline{\beta}}{\alpha+1}\right)}=\overline{\left(\dfrac{1}{4}\right)}=\dfrac{1}{4}$

よって，$\dfrac{\overline{\beta}}{\alpha+1}+\dfrac{\beta}{\overline{\alpha}+1}=\dfrac{1}{2}$

(3) $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{2-5i}{4-3i}=\dfrac{23-14i}{25}$ より

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right|=\frac{1}{25}\sqrt{23^2+(-14)^2}=\frac{\sqrt{29}}{5}$$

（注意）

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right|=\frac{|\alpha-\beta|}{|\alpha+\beta|}=\frac{\sqrt{2^2+(-5)^2}}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{\sqrt{29}}{5}$$

と計算することもできる。（第2講）

5 $|z|=2$

解説 $\dfrac{(z+2)^2}{z}$ が実数であるとき

$$\frac{(z+2)^2}{z}=\overline{\left\{\frac{(z+2)^2}{z}\right\}}$$

$$\frac{(z+2)^2}{z}=\frac{(\overline{z}+2)^2}{\overline{z}}$$

$$\overline{z}(z+2)^2=z(\overline{z}+2)^2$$

$$\overline{z}(z^2+4z+4)=z\{(\overline{z})^2+4\overline{z}+4\}$$

$$z^2\overline{z}+4z\overline{z}+4\overline{z}=z(\overline{z})^2+4z\overline{z}+4z$$

$$z^2\overline{z}-z(\overline{z})^2-4z+4\overline{z}=0$$

$$z\overline{z}(z-\overline{z})-4(z-\overline{z})=0$$

$$(|z|^2-4)(z-\overline{z})=0$$

z は虚数より，$z\neq\overline{z}$ であるから

$|z|^2=4$

$|z|\geqq0$ より，$|z|=2$

6 (1) $\boldsymbol{z-\overline{z}=i,\ z^2+\dfrac{1}{z^2}=1}$

(2) $\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

解説 (1) $|z-i|=1$ より，$|z-i|^2=1$ であるから

$(z-i)\overline{(z-i)}=1$

$(z-i)(\overline{z}+i)=1$

$z\overline{z}+i(z-\overline{z})=0$

$|z|=1$ より，$z\overline{z}=|z|^2=1$ であるから

$1+i(z-\overline{z})=0$

よって，$z-\overline{z}=i$

また，$z\overline{z}=1$ より，$\dfrac{1}{z}=\overline{z}$ であるから

$$z^2+\frac{1}{z^2}=\left(z-\frac{1}{z}\right)^2+2$$
$$=(z-\overline{z})^2+2$$
$$=i^2+2=1$$

(2) $|z-ai|^2=(z-ai)\overline{(z-ai)}$

$$=(z-ai)(\overline{z}+ai)$$
$$=z\overline{z}+a(z-\overline{z})i+a^2$$
$$=a^2-a+1$$
$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

よって，$|z-ai|^2$ は $a=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとる。

したがって，$|z-ai|\geqq0$ より，$|z-ai|$ は $a=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をとる。

7 $\boldsymbol{1-i}$

解説 求める複素数を $x+yi$（x，y は実数）とおき，P$(x+yi)$ とする。

$$\mathrm{AP}^2=|(x+yi)-(7-3i)|^2$$
$$=|(x-7)+(y+3)i|^2$$
$$=(x-7)^2+(y+3)^2$$
$$=x^2+y^2-14x+6y+58$$

$$\mathrm{BP}^2=|(x+yi)-(-1-7i)|^2$$
$$=|(x+1)+(y+7)i|^2$$
$$=(x+1)^2+(y+7)^2$$
$$=x^2+y^2+2x+14y+50$$

$$\mathrm{CP}^2=|(x+yi)-(-5+i)|^2$$
$$=|(x+5)+(y-1)i|^2$$
$$=(x+5)^2+(y-1)^2$$
$$=x^2+y^2+10x-2y+26$$

$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$，$\mathrm{AP}^2=\mathrm{CP}^2$ より

$$\begin{cases} x^2+y^2-14x+6y+58=x^2+y^2+2x+14y+50 \\ x^2+y^2-14x+6y+58=x^2+y^2+10x-2y+26 \end{cases}$$

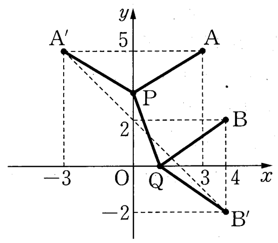
$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y=4 \end{cases}$$

よって，$x=1$，$y=-1$ となるから，求める複素数は，$1-i$

8 $\boldsymbol{7\sqrt{2}}$

解説 A$'(-3+5i)$，B$'(4-2i)$ とすると

$\mathrm{AP+PQ+QB=A'P+PQ+QB'\geqq A'B'}$



よって，上の図より，4点A′，P，Q，B′がこの順で一直線上にあるとき，AP+PQ+QB は最小となり，最小値は

$$\mathrm{A'B'}=|(4-2i)-(-3+5i)|$$
$$=|7-7i|$$
$$=\sqrt{7^2+(-7)^2}=7\sqrt{2}$$

P.6 **入試問題演習**

STEP 1

1 $\boldsymbol{z=1\pm2i}$

解説 $z=x+yi$（x，y は実数）とおくと，

$z+\overline{z}=2$ より

$(x+yi)+(x-yi)=2$

$2x=2 \qquad x=1$

$|z|=\sqrt{5}$ より

$x^2+y^2=5$

$x=1$ を代入して，$y^2=4 \qquad y=\pm2$

よって，$z=1\pm2i$

2 $\boldsymbol{1-2i}$

解説 $a_0+a_1z+a_2z^2$

$=a_0+a_1(-1+i)+a_2(-1+i)^2$

$=(a_0-a_1)+(a_1-2a_2)i$

これより

$|a_0+a_1z+a_2z^2|$

$=\sqrt{(a_0-a_1)^2+(a_1-2a_2)^2}$

a_0，a_1，a_2 は0または1の値をとるので，

$$\begin{cases} -1\leqq a_0-a_1\leqq1 \\ -2\leqq a_1-2a_2\leqq1 \end{cases}$$

よって

$$0\leqq\sqrt{(a_0-a_1)^2+(a_1-2a_2)^2}\leqq\sqrt{5}$$

が成り立ち，$a_0=1$，$a_1=0$，$a_2=1$ のとき，右側の不等式において等号が成立する。

したがって，求める複素数は，$1-2i$

3 (1) **α が与えられた3次方程式の解だから**

$\boldsymbol{\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+1=0}$

両辺の共役複素数をとって

$\boldsymbol{\overline{\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+1}=\overline{0}}$

$\boldsymbol{(\overline{\alpha})^3+\overline{a}(\overline{\alpha})^2+\overline{b}\,\overline{\alpha}+\overline{1}=\overline{0}}$

a，b は実数であるから

$\boldsymbol{(\overline{\alpha})^3+a(\overline{\alpha})^2+b\overline{\alpha}+1=0}$

よって，$\overline{\alpha}$ も与えられた3次方程式の解になる。

$$\boldsymbol{\beta=-\frac{1}{\alpha\overline{\alpha}},\ a=-\alpha-\overline{\alpha}+\frac{1}{\alpha\overline{\alpha}},}$$

$$\boldsymbol{b=\alpha\overline{\alpha}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}}$$

(2) $\boldsymbol{\beta=-\dfrac{1}{16},\ a=-\dfrac{95}{16},\ b=\dfrac{125}{8}}$

解説 (1) 解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\overline{\alpha}+\beta=-a & \cdots\cdots① \\ \alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\beta\alpha=b & \cdots\cdots② \\ \alpha\overline{\alpha}\beta=-1 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

③より，$\beta=-\dfrac{1}{\alpha\overline{\alpha}}$

①，②に代入して

$$a=-\alpha-\overline{\alpha}+\frac{1}{\alpha\overline{\alpha}}$$

$$b=\alpha\overline{\alpha}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}$$

(2) α の実部が3，α の絶対値が4であるから

$\alpha+\overline{\alpha}=2\times(\alpha$ の実部$)=6$

$\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=16$

よって，(1)より

$$\beta=-\frac{1}{\alpha\overline{\alpha}}=-\frac{1}{16}$$

$$a=-(\alpha+\overline{\alpha})-\beta=-6+\frac{1}{16}=-\frac{95}{16}$$

$$b=\alpha\overline{\alpha}+\beta(\alpha+\overline{\alpha})=16-\frac{1}{16}\times6$$
$$=\frac{125}{8}$$

4 **4**

解説 $z+\dfrac{1}{z}$ が実数であることより

$$z+\frac{1}{z}=\overline{z+\frac{1}{z}}$$

$$z+\frac{1}{z}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}$$

$$z^2\overline{z}+\overline{z}-z(\overline{z})^2-z=0$$

$$(z\overline{z}-1)(z-\overline{z})=0$$

$$(|z|^2-1)(z-\overline{z})=0$$

よって，$|z|^2=1$　または　$z=\bar{z}$

すなわち，$|z|=1$　または　z は実数

$|z|=1$ のとき，$x^2+y^2=1$ より

$x^2=1-y^2$，$-1\leqq y\leqq 1$

であるから

$$x^2y+4y^3=(1-y^2)y+4y^3$$
$$=3y^3+y$$

$f(y)=3y^3+y$ とおくと

$f'(y)=9y^2+1>0$

より，$f(y)$ は単調に増加する。

よって，$f(y)$ $(-1\leqq y\leqq 1)$ の最大値は

$f(1)=4$

z が実数のとき，$y=0$ より

$x^2y+4y^3=0$

以上より，x^2y+4y^3 は最大値 4 をとる。

STEP 2

1 (1) $\frac{1}{8}$　(2) $\frac{5}{16}$　(3) $\frac{15}{16}$

解説 硬貨を n 回投げて，裏が k 回出たとき

$$z_n=(n-k)\times 1+k(1+i)$$
$$=n+ki$$

(1) $n=3$ のとき，$z_3=3$ より，$k=0$

つまり，3 回のうち表が 3 回，裏が 0 回出る確率を求めればよいから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

(2) $n=5$ のとき，$z_5=5+2i$ より，$k=2$

つまり，5 回のうち表が 3 回，裏が 2 回出る確率を求めればよいから

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

(3) $n=7$ のとき，$|z_7-7|\leqq 5$ より

$|(7+ki)-7|\leqq 5$

$|ki|\leqq 5$

$|k|\leqq 5$

よって，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

つまり，7 回のうち裏が出る回数が 5 回以下となる確率を求めればよい。

そこで，余事象を考えると，裏が出る回数が 6 回または 7 回となり，その確率は

$${}_7C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{7}{128}+\frac{1}{128}$$
$$=\frac{1}{16}$$

したがって，求める確率は

$$1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

2 (1) **z が①を満たすとき，$|\bar{z}+i|+|\bar{z}-i|$ を計算すると**

$$|\bar{z}+i|+|\bar{z}-i|$$
$$=|\overline{z-i}|+|\overline{z+i}|$$
$$=|z-i|+|z+i|$$
$$=2\sqrt{2}\quad(①より)$$

よって，$\bar{z}$ も①を満たす。

(2) **$z=x+yi$ が①を満たすとき**

$$|(x+yi)+i|+|(x+yi)-i|=2\sqrt{2}$$
$$|x+(y+1)i|+|x+(y-1)i|=2\sqrt{2}$$
$$\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2\sqrt{2}$$
$$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2\sqrt{2}-\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

両辺を 2 乗して

$$x^2+(y+1)^2$$
$$=8-4\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y-1)^2}+x^2+(y-1)^2$$
$$4y-8=-4\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$
$$y-2=-\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

さらに両辺を 2 乗して

$$(y-2)^2=2\{x^2+(y-1)^2\}$$
$$2x^2+y^2=2$$

ここで，$w=\sqrt{2}x+yi$ より

$$|w|^2=(\sqrt{2}x)^2+y^2=2x^2+y^2$$

であるから

$$|w|^2=2$$

したがって，$|w|=\sqrt{2}$ が成り立つ。

第 2 講　複素数平面(2)

P.8〜P.9　類題

1 (1) $4\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$

(2) $2\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

(3) $\frac{3}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(4) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\pi+i\sin\pi)$

解説 (1) $r=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}=4$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ より $\theta=\frac{5}{3}\pi$

(2) $r=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ より $\theta=\frac{3}{4}\pi$

(3) $r=\frac{3}{4}$

$\cos\theta=0$，$\sin\theta=1$ より $\theta=\frac{\pi}{2}$

(4) $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta=-1$，$\sin\theta=0$ より $\theta=\pi$

2 $\overline{z_1}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z_1z_2=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right)$

解説 $z_1=\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$

$z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

であるから

$$\overline{z_1}=2\left\{\cos\left(-\frac{11}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{11}{6}\pi\right)\right\}$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$z_1z_2=2\times 2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{11}{6}\pi+\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{11}{6}\pi+\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$$
$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{31}{12}\pi+i\sin\frac{31}{12}\pi\right)$$
$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{2\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{11}{6}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{11}{6}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right)$$

3 (1) **実軸に関して対称移動し，さらに原点を中心として $-\frac{5}{6}\pi$ だけ回転した点**

(2) **原点を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点**

(3) **原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点**

解説 (1) $-\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ より，点 $\left(-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\bar{z}$ は，点 z を実軸に関して対称移動し，さらに原点を中心として $-\frac{5}{6}\pi$ だけ回転した点である。

(2) $$\frac{1}{i}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}$$
$$=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

より，点 $\frac{1}{i}z$ は，点 z を原点を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

(3) $$\frac{\sqrt{2}}{1-i}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}}$$
$$=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$$

より，点 $\frac{\sqrt{2}}{1-i}z$ は，点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点である。

4 (1) -512　(2) $-\frac{27}{4}+\frac{27}{4}i$

(3) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

解説 (1) $\sqrt{6}-\sqrt{2}i=2\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

であるから

$$(\sqrt{6}-\sqrt{2}i)^6$$
$$=(2\sqrt{2})^6\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^6$$
$$=512\{\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\}$$
$$=-512$$

(2) $\frac{3+3i}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$\left(\frac{3+3i}{2}\right)^3=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^3$$
$$=\frac{27\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$
$$=-\frac{27}{4}+\frac{27}{4}i$$

(3) $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$ であるから

$$\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{-20}$$
$$=\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^{-20}$$
$$=\cos\frac{40}{3}\pi+i\sin\frac{40}{3}\pi$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

5 $\pm1,\ \pm i$

解説 1の4乗根は

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}$$
$$=\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

すなわち

$z_0=1,\ z_1=i,\ z_2=-1,\ z_3=-i$

P.10 演習問題

1 (1) $12\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$

(2) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(3) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi\right)$

(4) $\cos\frac{23}{12}\pi+i\sin\frac{23}{12}\pi$

(5) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

(6) $2\cos\alpha(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

解説 (1) $-2i(3+3\sqrt{3}i)$

$=6\sqrt{3}-6i$

$=12\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$

(2) $\frac{-4+8i}{1+3i}$

$=\frac{20+20i}{10}=2+2i$

$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(3) $1-\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi\right)$$

(4) $\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}$

$=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

$=\cos\frac{23}{12}\pi+i\sin\frac{23}{12}\pi$

(5) $\sin\alpha+i\cos\alpha$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より, $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ は, $0\leqq\theta<2\pi$ を満たす。)

(6) $(1+\cos2\alpha)+i\sin2\alpha$

$=2\cos^2\alpha+2i\sin\alpha\cos\alpha$

$=2\cos\alpha(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より, $r=2\cos\alpha$, $\theta=\alpha$ は $r>0$, $0\leqq\theta<2\pi$ を満たす。)

2 (1) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

(2) $\frac{7}{12}\pi$

解説 (1) $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})+(\sqrt{2}+\sqrt{6})i}{1+\sqrt{3}i}$

$=\frac{\{(\sqrt{2}-\sqrt{6})+(\sqrt{2}+\sqrt{6})i\}(1-\sqrt{3}i)}{4}$

$=\frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}{4}$

$=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

(2) $\arg\frac{\beta}{\alpha}=\arg\beta-\arg\alpha$ であり

$\arg\alpha=\arg(1+\sqrt{3}i)=\frac{\pi}{3}$

$\arg\frac{\beta}{\alpha}=\arg(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)=\frac{\pi}{4}$

よって

$\frac{\pi}{4}=\arg\beta-\frac{\pi}{3}$

$\arg\beta=\frac{7}{12}\pi$

3 (1) $\frac{1-2\sqrt{3}}{2}+\frac{2+\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1+2\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}i$

(2) $\beta=-2+i,\ \gamma=-1+3i$

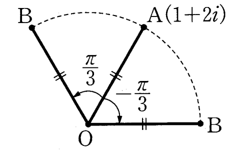
または $\beta=2-i,\ \gamma=3+i$

解説 (1) 点Bは, 点Aを原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

$\beta=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(1+2i)$

または

$\beta=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(1+2i)$



よって

$\beta=\frac{1-2\sqrt{3}}{2}+\frac{2+\sqrt{3}}{2}i$

または

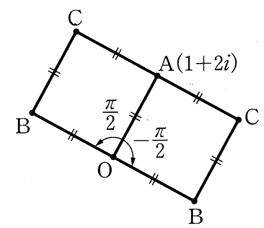
$\beta=\frac{1+2\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}i$

(2) 点Bは, 点Aを原点を中心として $\frac{\pi}{2}$ または $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから

$\beta=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)(1+2i)$

または

$\beta=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}(1+2i)$



よって

$\beta=-2+i$ または $\beta=2-i$

さらに, 四角形OACBは正方形, すなわち平行四辺形であるから

$\gamma=\alpha+\beta$

よって

$\beta=-2+i$ のとき, $\gamma=-1+3i$

$\beta=2-i$ のとき, $\gamma=3+i$

(別解)

点Bは, 点Aを原点を中心として $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点であり, 点Cは, 点Aを原点を中心として $\pm\frac{\pi}{4}$ だけ回転し, さらに原点からの距離を$\sqrt{2}$倍にしたものであるから

$$\begin{cases}\beta=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)(1+2i)\\ \gamma=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(1+2i)\end{cases}$$

または

$$\begin{cases}\beta=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}(1+2i)\\ \gamma=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\ \quad\times(1+2i)\end{cases}$$

よって

$\beta=-2+i,\ \gamma=-1+3i$

または

$\beta=2-i,\ \gamma=3+i$

4 (1) $-\frac{1}{64}$

(2) $-\frac{1}{4}$

(3) n が3の倍数でないとき -2^n

n が3の倍数のとき 2^{n+1}

解説 (1) $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ であるから

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{12}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{12}$$
$$=\frac{1}{64}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\frac{1}{64}$$

(2) $\frac{-4+i}{5+3i}=\frac{-17+17i}{34}$

$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

であるから

$$\left(\frac{-4+i}{5+3i}\right)^4=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)^4$$
$$=\frac{1}{4}(\cos3\pi+i\sin3\pi)$$

$$=-\frac{1}{4}$$

(3) $(-1+\sqrt{3}\,i)^n=2^n\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^n$

$$=2^n\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$(-1-\sqrt{3}\,i)^n$

$$=2^n\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^n$$

$$=2^n\left\{\cos\left(-\frac{2n\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=2^n\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

であるから

$(-1+\sqrt{3}\,i)^n+(-1-\sqrt{3}\,i)^n$

$$=2^n\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)+2^n\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$=2^{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$$

$$=\begin{cases}-2^n & (n\text{が3の倍数でないとき})\\ 2^{n+1} & (n\text{が3の倍数のとき})\end{cases}$$

5 $\boldsymbol{n=12,\ \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^n=-64}$

解説 $(1+i)^n=(\sqrt{2}\,)^n\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n$

$$=(\sqrt{2}\,)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^n$

$$=2^n\left\{\cos\left(-\frac{n\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{6}\right)\right\}$$

よって，$(1+i)^n$ と $(\sqrt{3}-i)^n$ がともに実数となるための条件は

$\frac{n\pi}{4}$ と $\frac{n\pi}{6}$ がともに π の整数倍となる

つまり

n が4と6の公倍数となる

ことであるから，求める最小の自然数 n は

$n=12$

また，このとき

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{12}$$

$$=\frac{2^{12}\{\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi)\}}{(\sqrt{2}\,)^{12}(\cos3\pi+i\sin3\pi)}$$

$$=-64$$

6 (1) $\boldsymbol{z=\pm1,\ \pm i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i}$

(2) $\boldsymbol{z=-1,\ \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

(3) $\boldsymbol{z=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i,}$

$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i}$

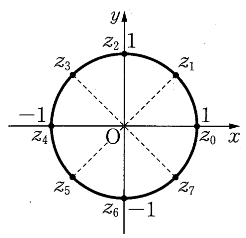
(4) $\boldsymbol{z=i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$

解説 (1) z は1の8乗根であるから

$$z=\cos\frac{2k\pi}{8}+i\sin\frac{2k\pi}{8}$$

$$=\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}$$

$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$



よって

$$z=\pm1,\ \pm i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

(2) $z=1$ は解ではないから，$z\neq1$

両辺に $z-1\,(\neq0)$ をかけて

$(z-1)(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z^6-1=0$

$z^6=1$

よって，z は1の6乗根のうち，1と異なるものであるから

$$z=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}$$

$$=\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}$$

$(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

したがって

$$z=-1,\ \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(3) $-2+2\sqrt{3}\,i=4\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

求める z を

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$

とおくと

$z^4=r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)$

$z^4=-2+2\sqrt{3}\,i$ より

$$\begin{cases}r^4=4\\ 4\theta=\frac{2}{3}\pi+2k\pi\quad(k\text{は整数})\end{cases}$$

$r>0$ より，$r=\sqrt{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

つまり

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

したがって

$$z=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i,$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$$

(4) $z^6+2iz^3-1=0$ より

$z^6+2iz^3+i^2=0$

$(z^3+i)^2=0$

$z^3=-i$

ここで

$$-i=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi$$

求める z を

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$

とおくと

$z^3=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)$

$z^3=-i$ より

$$\begin{cases}r^3=1\\ 3\theta=\frac{3}{2}\pi+2k\pi\quad(k\text{は整数})\end{cases}$$

$r>0$ より，$r=1$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\quad(k=0,\ 1,\ 2)$$

つまり

$$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

したがって

$$z=i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

7 (1) $\boldsymbol{z^5=1}$

$\boldsymbol{z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0}$

(2) $\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

解説 (1) $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ より

$$z^5=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$$

$$=\cos2\pi+i\sin2\pi$$

$$=1$$

さらに

$z^5-1=0$

$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z\neq1$ より

$z^4+z^3+z^2+z+1=0$

$z\neq0$ より，両辺を z^2 で割って

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$$

(2) $z+\frac{1}{z}=t$ とおくと

$$z^2+\frac{1}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2z\cdot\frac{1}{z}$$

$$=t^2-2$$

であるから，(1)の結果より

$(t^2-2)+t+1=0$

$t^2+t-1=0$

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

一方，$z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ より

$$\frac{1}{z}=\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$=\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}$$

であるから

$$z+\frac{1}{z}=2\cos\frac{2\pi}{5}>0$$

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}t>0$$

したがって

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

P.11 入試問題演習

STEP 1

1 (1) **$|z|=1$ より，$z=\cos\theta+i\sin\theta$（θ は実数）とおけて**

$$\boldsymbol{\frac{1}{z}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}$$

$$\boldsymbol{=\cos\theta-i\sin\theta}$$

よって，$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ となり，これは実数である。

(2) $\boldsymbol{-2\leqq z+\frac{1}{z}\leqq2}$

(3) **最大値　6**
最小値　−3

解説 (1) （別解）　$|z|=1$ より，$z\bar{z}=1$　　$\frac{1}{z}=\bar{z}$

よって

$$z+\frac{1}{z}=z+\overline{z}=2\times(z\text{ の実部})$$

となり，これは実数である。

(2)　(1)より，$z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$ と表せるから，

$z+\dfrac{1}{z}$ の値の範囲は

$$-2\leqq z+\frac{1}{z}\leqq 2$$

(3)　$z+\dfrac{1}{z}=t$ とおくと，(2)より

$$-2\leqq t\leqq 2$$

また

$$z^2+\frac{1}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2z\cdot\frac{1}{z}$$
$$=t^2-2$$

であるから

$$z^2+\frac{1}{z^2}+2\left(z+\frac{1}{z}\right)$$
$$=(t^2-2)+2t$$
$$=t^2+2t-2$$
$$=(t+1)^2-3\quad(-2\leqq t\leqq 2)$$

よって

最大値　6　$(t=2)$

最小値　-3　$(t=-1)$

2　(1)　**2次方程式が虚数解をもつことより**

$$a^2-4b<0\quad\cdots\cdots①$$

また，$u+\sqrt{3}v=0$ **より，**$v=-\dfrac{u}{\sqrt{3}}$　$\cdots\cdots②$

解と係数の関係より

$$\begin{cases}(u+vi)+(u-vi)=-a & \cdots\cdots③\\ (u+vi)(u-vi)=b & \cdots\cdots④\end{cases}$$

③より　$2u=-a$

$$u=-\frac{a}{2}\quad\cdots\cdots③'$$

これと $u<0$ **より，**$a>0$ **である。**

さらに，④より，$u^2+v^2=b$

②，③′より

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2=b$$

$$\frac{a^2}{3}=b$$

$$a^2=3b$$

(これより，$b>0$ **で，①も満たされる。)**

(2)　$\alpha=a\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$

$\beta=a^2\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}i\right)$

(3)　$\alpha=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \beta=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_2=-1$$

解説(2)　$z_1=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}x_1$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)x_1$$

$$z_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)x_2$$

であるから

$$\alpha=z_1+z_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)(x_1+x_2)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)(-a)$$
$$=a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$\beta=z_1z_2$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^2x_1x_2$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)b$$
$$=a^2\left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)\quad\left(b=\frac{a^2}{3}\text{ より}\right)$$

(3)　(2)より

$$\alpha+\beta=\frac{-\sqrt{3}a+b}{2}+\frac{a-\sqrt{3}b}{2}i$$

であるから，これが実数のとき

$a-\sqrt{3}b=0$

$a=\sqrt{3}b$

(1)より，$a>0$，$a^2=3b$ であるから

$(\sqrt{3}b)^2=3b$，$b>0$

よって，$b=1$，$a=\sqrt{3}$

このとき，$u=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$v=\dfrac{1}{2}$ であり，

$$x_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\quad x_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_2=-1$$

$$\alpha=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \beta=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

3　(1)　$-1+i$

(2)　0

(3)　$p+q=12$ **のとき，**$q=12-p$ **より**

$$\gamma_p=\left(\cos\frac{p\pi}{6}+\cos\frac{p\pi}{3}\right)$$
$$+i\left(\sin\frac{p\pi}{6}+\sin\frac{p\pi}{3}\right)$$

$$\gamma_q=\left(\cos\frac{q\pi}{6}+\cos\frac{q\pi}{3}\right)$$
$$+i\left(\sin\frac{q\pi}{6}+\sin\frac{q\pi}{3}\right)$$

$$=\left\{\cos\frac{(12-p)\pi}{6}+\cos\frac{(12-p)\pi}{3}\right\}$$
$$+i\left\{\sin\frac{(12-p)\pi}{6}+\sin\frac{(12-p)\pi}{3}\right\}$$
$$=\left\{\cos\left(2\pi-\frac{p\pi}{6}\right)+\cos\left(4\pi-\frac{p\pi}{3}\right)\right\}$$
$$+i\left\{\sin\left(2\pi-\frac{p\pi}{6}\right)+\sin\left(4\pi-\frac{p\pi}{3}\right)\right\}$$
$$=\left\{\cos\left(-\frac{p\pi}{6}\right)+\cos\left(-\frac{p\pi}{3}\right)\right\}$$
$$+i\left\{\sin\left(-\frac{p\pi}{6}\right)+\sin\left(-\frac{p\pi}{3}\right)\right\}$$
$$=\left(\cos\frac{p\pi}{6}+\cos\frac{p\pi}{3}\right)$$
$$-i\left(\sin\frac{p\pi}{6}+\sin\frac{p\pi}{3}\right)$$
$$=\overline{\gamma_p}$$

よって，γ_p **と** γ_q **は共役な複素数になる。**

解説　$\alpha^n=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^n=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^n$

$$=\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}$$

$\beta^n=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^n$

$$=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$$

であるから

$$\gamma_n=\left(\cos\frac{n\pi}{6}+\cos\frac{n\pi}{3}\right)$$
$$+i\left(\sin\frac{n\pi}{6}+\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

(1)　$\gamma_3=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+\cos\pi\right)+i\left(\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin\pi\right)$

$$=-1+i$$

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{12}\gamma_n=\sum_{n=1}^{12}(\alpha^n+\beta^n)$

$$=\frac{\alpha(\alpha^{12}-1)}{\alpha-1}+\frac{\beta(\beta^{12}-1)}{\beta-1}$$

$(\alpha\neq1,\ \beta\neq1$ より$)$

ここで

$\alpha^{12}=\cos2\pi+i\sin2\pi=1$

$\beta^{12}=\cos4\pi+i\sin4\pi=1$

であるから

$$\sum_{n=1}^{12}\gamma_n=0$$

STEP 2

1　(1)　$\beta=z-1=(\cos\theta-1)+i\sin\theta$ **より**

$|\beta|^2=(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta$

$=2-2\cos\theta$

$$=2-2\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$|\beta|\geqq0$，$0<\theta<\pi$ **より** $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$ **であるから**

$$|\beta|=2\sin\frac{\theta}{2}$$

(2)　$\beta=(\cos\theta-1)+i\sin\theta$

$$=-2\sin^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi+\theta}{2}+i\sin\frac{\pi+\theta}{2}\right)\quad\cdots\cdots①$$

ここで，$|\beta|=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ **より，①は** β **の極形式**

であり，$0<\theta<\pi$ **より，**$\arg\beta=\dfrac{\pi+\theta}{2}$ **は**

$$0\leqq\arg\beta<2\pi$$

を満たしている。

よって，$\arg\beta=\dfrac{\pi+\theta}{2}$ **である。**

(3)　**最小値**　$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$(m,\ n)=(2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)$

解説(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ で，

$$\alpha=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\beta=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$$

となるから

$$\alpha^m\beta^n=3^{\frac{m}{2}}\left\{\cos\left(\frac{m}{6}+\frac{2n}{3}\right)\pi\right.$$
$$\left.+i\sin\left(\frac{m}{6}+\frac{2n}{3}\right)\pi\right\}$$

よって，$\alpha^m\beta^n$ の虚部は

$$3^{\frac{m}{2}}\sin\left(\frac{m}{6}+\frac{2n}{3}\right)\pi$$
$$=3^{\frac{m}{2}}\sin\frac{m+4n}{6}\pi\quad(m,\ n=1,\ 2,\ 3)$$

$\cdots\cdots②$

$m=1$ のとき

②$=\sqrt{3}\sin\dfrac{1+4n}{6}\pi$ より

$n=1$ のとき，②$=\sqrt{3}\sin\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$n=2$ のとき，②$=\sqrt{3}\sin\dfrac{3}{2}\pi=-\sqrt{3}$

$n=3$ のとき，②$=\sqrt{3}\sin\dfrac{13}{6}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$m=2$ のとき

②$=3\sin\dfrac{2+4n}{6}\pi$ より

$n=1$ のとき，②$=3\sin\pi=0$

$n=2$ のとき，②$=3\sin\dfrac{5}{3}\pi=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$n=3$ のとき，②$=3\sin\dfrac{7}{3}\pi=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$m=3$ のとき

②$=3\sqrt{3}\sin\dfrac{3+4n}{6}\pi$ より

$n=1$ のとき，

②$=3\sqrt{3}\sin\dfrac{7}{6}\pi=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$n=2$ のとき，

②$=3\sqrt{3}\sin\dfrac{11}{6}\pi=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$n=3$ のとき，②$=3\sqrt{3}\sin\dfrac{5}{2}\pi=3\sqrt{3}$

したがって，$\alpha^m\beta^n$ の虚部の最小値は

$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

であり，これを与える$(m,\ n)$は

$(m,\ n)=(2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)$

2 (1) **$\theta=\dfrac{2}{7}\pi$ より，$\alpha=\cos\dfrac{2}{7}\pi+i\sin\dfrac{2}{7}\pi$ であるから**

$\overline{\alpha}=\cos\dfrac{2}{7}\pi-i\sin\dfrac{2}{7}\pi$

一方，$\alpha^7=\cos2\pi+i\sin2\pi=1$ となるから

$\alpha^6=\dfrac{1}{\alpha}=\cos\left(-\dfrac{2}{7}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{2}{7}\pi\right)$

$=\cos\dfrac{2}{7}\pi-i\sin\dfrac{2}{7}\pi$

よって，$\overline{\alpha}=\alpha^6$ である。

(2) **$\beta+\overline{\beta}=-1,\ \beta\overline{\beta}=2$**

(3) **$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$**

解説 (2) $\alpha^7=1$ より

$\alpha^7-1=0$

$(\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\neq1$ より

$\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ ……①

一方，(1)と同様にして

$\overline{\alpha^2}=\alpha^5,\ \overline{\alpha^4}=\alpha^3$

となるから

$$\begin{aligned}\beta+\overline{\beta}&=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)+(\overline{\alpha}+\overline{\alpha^2}+\overline{\alpha^4})\\&=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)+(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^3)\\&=\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha\\&=-1\quad(①より)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta\overline{\beta}&=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\overline{\alpha}+\overline{\alpha^2}+\overline{\alpha^4})\\&=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^3)\\&=\alpha^7+\alpha^6+\alpha^4+\alpha^8+\alpha^7+\alpha^5\\&\quad+\alpha^{10}+\alpha^9+\alpha^7\\&=1+\alpha^6+\alpha^4+\alpha+1+\alpha^5+\alpha^3+\alpha^2+1\\&\qquad(\alpha^7=1 より)\\&=3+(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha)\\&=2\quad(①より)\end{aligned}$$

(3) (2)より，βは2次方程式

$t^2+t+2=0$

の解であり，これを解くと

$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

ここで，

$\beta=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$

$=(\cos\theta+\cos2\theta+\cos4\theta)$

$\quad+i(\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta)$

より，$\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta$ はβの虚部である。

さらに，$\theta=\dfrac{2\pi}{7}$ より

$\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta$

$=\sin\dfrac{2}{7}\pi+\sin\dfrac{4}{7}\pi+\sin\dfrac{8}{7}\pi$

$=\sin\dfrac{2}{7}\pi+\sin\dfrac{3}{7}\pi-\sin\dfrac{\pi}{7}>0$

$\left(0<\dfrac{\pi}{7}<\dfrac{2}{7}\pi<\dfrac{3}{7}\pi<\dfrac{\pi}{2}\ より\right)$

したがって

$\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

第3講 複素数平面と図形

P.13〜P.14 **類題**

1 **点 $-\dfrac{9}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円**

解説 方程式の両辺を2乗すると

$|z|^2=9|z+4|^2$

$z\overline{z}=9(z+4)\overline{(z+4)}$

$z\overline{z}=9(z+4)(\overline{z}+4)$

展開して整理すると

$z\overline{z}+\dfrac{9}{2}(z+\overline{z})+18=0$

$\left(z+\dfrac{9}{2}\right)\left(\overline{z}+\dfrac{9}{2}\right)=\dfrac{9}{4}$

$\left(z+\dfrac{9}{2}\right)\overline{\left(z+\dfrac{9}{2}\right)}=\dfrac{9}{4}$

$\left|z+\dfrac{9}{2}\right|^2=\dfrac{9}{4}$

$\left|z+\dfrac{9}{2}\right|=\dfrac{3}{2}$

よって，求める図形は

点 $-\dfrac{9}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円

である。

2 (1) **点 $3-2i$ を中心とする半径2の円**

(2) **2点 -1 と i を結ぶ線分の垂直二等分線**

解説 点zは原点Oを中心とする半径1の円上を動くから

$|z|=1$

である。

(1) $w=2i(z-1)+3$ より

$z=\dfrac{w-3}{2i}+1$

$=\dfrac{w-(3-2i)}{2i}$

であるから，$|z|=1$ に代入して

$\left|\dfrac{w-(3-2i)}{2i}\right|=1$

$\dfrac{|w-(3-2i)|}{|2i|}=1$

$|w-(3-2i)|=2$

よって，点wが描く図形は

点 $3-2i$ を中心とする半径2の円

である。

(2) $w=\dfrac{iz-1}{z+1}$ より

$w(z+1)=iz-1$

$(w-i)z=-(w+1)$

$w=i$ はこの等式を満たさないので，$w\neq i$ であり

$z=\dfrac{-(w+1)}{w-i}$

これを，$|z|=1$ に代入して

$\left|\dfrac{-(w+1)}{w-i}\right|=1$

$|w+1|=|w-i|$

よって，点wが描く図形は

2点 -1 と i を結ぶ線分の垂直二等分線

である。

3 (1) **$\dfrac{\pi}{3}$** (2) **$\dfrac{\pi}{6}$**

解説 $\alpha=-1+i,\ \beta=1+i,\ \gamma=1+(1+2\sqrt{3})i$ とおく。

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\{1+(1+2\sqrt{3})i\}-(-1+i)}{(1+i)-(-1+i)}$

$=1+\sqrt{3}i$

$=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

より，$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\pi}{3}$

よって，$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$

(2) $\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\dfrac{(1+i)-\{1+(1+2\sqrt{3})i\}}{(-1+i)-\{1+(1+2\sqrt{3})i\}}$

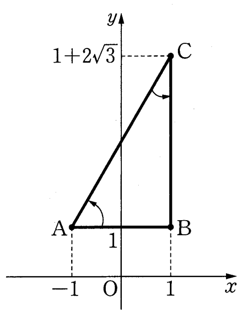
$=\dfrac{\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$

$=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

より，$\arg\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\dfrac{\pi}{6}$

よって，$\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{6}$



4 (1) **一直線上にあるとき，$c=\dfrac{13}{2}$**

垂直となるとき，$c=\dfrac{13}{3}$

(2) **$d=\dfrac{17}{2}$**

解説 (1)　$\alpha=5-i$, $\beta=2+i$, $\gamma=c-2i$ とおくと

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(c-2i)-(5-i)}{(2+i)-(5-i)}$$
$$=\frac{(c-5)-i}{-3+2i}$$
$$=\frac{(-3c+13)+(-2c+13)i}{13}$$

3点A, B, Cが一直線上にあるのは, $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数のときであるから

$-2c+13=0$　　$c=\frac{13}{2}$

ABとACが垂直となるのは, $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数のときであるから

$-3c+13=0$　かつ　$-2c+13\neq0$

$c=\frac{13}{3}$

(2)　$\alpha=3+2i$, $\beta=-2$, $\gamma=1+i$, $\delta=-2+di$ とおくと

$$\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}=\frac{(-2+di)-(1+i)}{-2-(3+2i)}$$
$$=\frac{-3+(d-1)i}{-5-2i}$$
$$=\frac{(-2d+17)+(-5d-1)i}{29}$$

ABとCDが垂直となるのは, $\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が純虚数のときであるから

$-2d+17=0$　かつ　$-5d-1\neq0$

$d=\frac{17}{2}$

P.15　**演習問題**

1　(1)　$\frac{6}{5}+\frac{17}{5}i$　　(2)　$-18+13i$

(3)　$2+3i$　　(4)　$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

解説　$\alpha=-2+5i$, $\beta=6+i$, $\gamma=-3-4i$ とおく。

(1)　求める複素数は

$$\frac{3\alpha+2\beta}{2+3}=\frac{3(-2+5i)+2(6+i)}{5}$$
$$=\frac{6}{5}+\frac{17}{5}i$$

(2)　求める複素数は

$$\frac{-3\alpha+2\beta}{2-3}=\frac{-3(-2+5i)+2(6+i)}{-1}$$
$$=-18+13i$$

(3)　求める複素数は

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{(-2+5i)+(6+i)}{2}$$
$$=2+3i$$

(4)　求める複素数は

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\frac{(-2+5i)+(6+i)+(-3-4i)}{3}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

2　(1)　**点 $-1+8i$ を中心とする半径 $2\sqrt{5}$ の円**

(2)　**原点を通り, 実軸の正の方向とのなす角が $\frac{\pi}{4}$ である直線**

解説 (1)　方程式を変形すると

$|z-3|=2|z-6i|$

両辺を2乗すると

$|z-3|^2=4|z-6i|^2$

$(z-3)(\bar{z}-3)=4(z-6i)(\bar{z}+6i)$

$z\bar{z}+(1+8i)z+(1-8i)\bar{z}+45=0$

$\{z+(1-8i)\}\{\bar{z}+(1+8i)\}=20$

$\{z+(1-8i)\}\overline{\{z+(1-8i)\}}=20$

$|z+(1-8i)|^2=20$

$|z-(-1+8i)|=2\sqrt{5}$

よって, 求める図形は

点 $-1+8i$ を中心とする半径 $2\sqrt{5}$ の円

である。

(2)　$z=x+yi$ (x, y は実数) とおいて, 方程式に代入すると

$(1-i)(x+yi)=(1+i)(x-yi)$

$(x+y)+(-x+y)i=(x+y)+(x-y)i$

x, y は実数であるから

$-x+y=x-y$

$y=x$

よって, 求める図形は

原点を通り, 実軸の正の方向とのなす角が $\frac{\pi}{4}$ である直線

である。

(別解)

$(1-i)z=(1+i)\bar{z}$ より

$(1-i)z=\overline{(1-i)z}$

これより, $(1-i)z$ は実数であるから

$(1-i)z=t$　(t は実数)

とおくと

$$z=\frac{t}{1-i}$$
$$z=\frac{1}{\sqrt{2}}t\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

点 $\frac{1}{\sqrt{2}}t$ は実軸全体を動き, 点 z は, 点 $\frac{1}{\sqrt{2}}t$ を原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点である。

よって, 求める図形は

原点を通り, 実軸の正の方向とのなす角が $\frac{\pi}{4}$ である直線

である。

3　(1)　**点 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円**

(2)　**点 $\frac{5}{4}$ を中心とする半径 $\frac{3}{4}$ の円**

(3)　**2点6と -6 を結ぶ線分(端点を含む)**

解説　点 z が原点を中心とする半径3の円上を動くから

$|z|=3$

である。

(1)　$w=\frac{z+1+i}{2}$ より

$z=2w-(1+i)$

であるから, $|z|=3$ に代入して

$|2w-(1+i)|=3$

$\left|w-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right|=\frac{3}{2}$

よって, 点 w が描く図形は

点 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円

である。

(2)　$w=\frac{z-1}{z+1}$ より

$(z+1)w=z-1$

$(w-1)z=-(w+1)$

$w=1$ はこの等式を満たさないので, $w\neq1$ であり

$$z=\frac{-(w+1)}{w-1}$$

$|z|=3$ に代入して

$\left|\frac{-(w+1)}{w-1}\right|=3$

$|w+1|=3|w-1|$

両辺を2乗すると

$|w+1|^2=9|w-1|^2$

$(w+1)(\bar{w}+1)=9(w-1)(\bar{w}-1)$

$w\bar{w}-\frac{5}{4}(w+\bar{w})+1=0$

$\left(w-\frac{5}{4}\right)\left(\bar{w}-\frac{5}{4}\right)=\frac{9}{16}$

$\left|w-\frac{5}{4}\right|^2=\frac{9}{16}$

$\left|w-\frac{5}{4}\right|=\frac{3}{4}$

よって, 点 w が描く図形は

点 $\frac{5}{4}$ を中心とする半径 $\frac{3}{4}$ の円

である。

(3)　$|z|=3$ より, $z=3(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおけて, このとき,

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{3}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$
$$=\frac{1}{3}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

となるから

$$w=z+\frac{9}{z}$$
$$=3(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$+9\cdot\frac{1}{3}(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=6\cos\theta$$

よって, $0\leqq\theta<2\pi$ より, 点 w が描く図形は

2点6と -6 を結ぶ線分(端点を含む)

である。

(別解)

$|z|=3$ より, $z\bar{z}=9$

ゆえに, $\frac{9}{z}=\bar{z}$ であるから

$w=z+\frac{9}{z}=z+\bar{z}$

$=2\times$(z の実部)

$|z|=3$ より, z の実部のとりうる値の範囲は, $-3\leqq$(z の実部)$\leqq3$

よって, $-6\leqq w\leqq6$ となるから, 点 w の描く図形は

2点6と -6 を結ぶ線分(端点を含む)

である。

4　(1)　$\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)+\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$

または $\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)+\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$

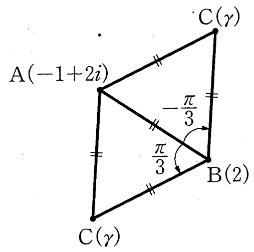
(2)　$-2+4i$ **と** $4+2i$

解説 (1)　点Cは, 点Aを点Bを中心として $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

$$\gamma-2=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\{(-1+2i)-2\}\quad\cdots\cdots①$$

または

$$\gamma-2=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\times\{(-1+2i)-2\}\quad\cdots\cdots②$$



①より

$$\gamma=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-3+2i)+2$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)+\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$$

②より

$$\gamma=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-3+2i)+2$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)+\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$$

よって

$$\gamma=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)+\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$$

または

$$\gamma=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)+\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$$

(2) 正方形の残りの頂点は，点Aを原点Oを中心として$\frac{\pi}{4}$だけ回転し，Oからの距離を$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍にした点，および$-\frac{\pi}{4}$だけ回転し，Oからの距離を$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍にした点であるから，これらを表す複素数をそれぞれz_1，z_2とすると

$$z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(2+6i)$$

$$=\frac{1}{2}(1+i)(2+6i)$$

$$=-2+4i$$

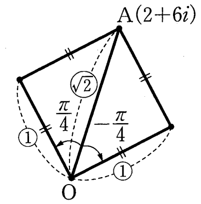
$$z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\times(2+6i)$$

$$=\frac{1}{2}(1-i)(2+6i)$$

$$=4+2i$$

よって，求める複素数は

$-2+4i$ と $4+2i$



(別解)

線分OAの中点をBとすると，B$(1+3i)$

正方形の残りの頂点は，原点Oを点Bを中心として$\frac{\pi}{2}$だけ回転した点，および$-\frac{\pi}{2}$だけ回転した点であるから，これらを表す複素数をそれぞれw_1，w_2とすると

$$w_1-(1+3i)$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\{0-(1+3i)\}$$

$$w_1=i(-1-3i)+(1+3i)$$

$$=4+2i$$

$$w_2-(1+3i)$$

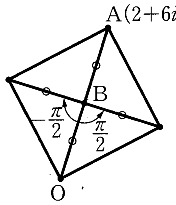
$$=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\{0-(1+3i)\}$$

$$w_2=-i(-1-3i)+(1+3i)$$

$$=-2+4i$$

よって，求める複素数は

$4+2i$ と $-2+4i$



5 (1) **辺ACを斜辺とする直角二等辺三角形**

(2) **AB：BC=2：1，∠Bが直角の直角三角形**

(3) **CA=CB，∠C=$\frac{2}{3}\pi$の二等辺三角形**

解説 (1) $\gamma-\alpha=(1+i)(\beta-\alpha)$，$\beta\neq\alpha$より

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

よって

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\sqrt{2},\ \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\pi}{4}$$

すなわち

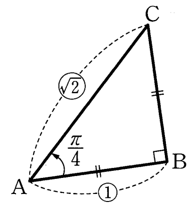
$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\sqrt{2},\ \angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{4}$$

したがって，三角形ABCは

辺ACを斜辺とする直角二等辺三角形

である。

(∠BAC=$\frac{\pi}{4}$は向きを含めた角であり，3点A，B，Cは下の図のように，反時計まわりに並んでいる。)



(2) $\alpha-2i\gamma=(1-2i)\beta$より

$$\alpha-\beta=2i(\gamma-\beta)$$

$\gamma\neq\beta$より

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

よって

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right|=2,\ \arg\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=\frac{\pi}{2}$$

すなわち

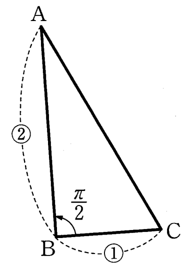
$$\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}}=2,\ \angle\mathrm{CBA}=\frac{\pi}{2}$$

したがって，三角形ABCは

AB：BC=2：1，∠Bが直角の直角三角形

である。

(3点A，B，Cは反時計まわりに並んでいる。)



(3) $\beta\neq\gamma=0$より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$の両辺を$\beta^2$で割って

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\frac{\alpha}{\beta}+1=0$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$=\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\frac{\alpha-0}{\beta-0}=\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)$$

(複号同順)

よって

$$\left|\frac{\alpha-0}{\beta-0}\right|=1,\ \arg\frac{\alpha-0}{\beta-0}=\pm\frac{2}{3}\pi$$

すなわち

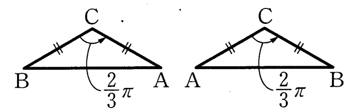
$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}=1$$

$$\angle\mathrm{BCA}=\frac{2}{3}\pi\ \text{または}\ \angle\mathrm{ACB}=\frac{2}{3}\pi$$

したがって，三角形ABCは

CA=CB，∠C=$\frac{2}{3}\pi$の二等辺三角形

である。



6 3

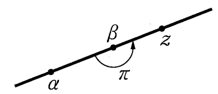
解説 $\alpha=-1+4i$，$\beta=2+7i$，$z=p+(p^2-1)i$とおくと，3点α，β，zがこの順に一直線上に並ぶための条件は，αとzがβに関して反対側にあることから

$$\arg\frac{z-\beta}{\alpha-\beta}=\pi$$

つまり

$\frac{z-\beta}{\alpha-\beta}$が負の実数となる

ことである。



ここで

$$\frac{z-\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\{p+(p^2-1)i\}-(2+7i)}{(-1+4i)-(2+7i)}$$

$$=\frac{(p-2)+(p^2-8)i}{-3-3i}$$

$$=-\frac{1}{6}\{(p^2+p-10)+(p^2-p-6)i\}$$

であり，これが実数となるから

$$p^2-p-6=0$$

$$(p+2)(p-3)=0\quad p=-2,\ 3$$

$p=-2$のとき，$\frac{z-\beta}{\alpha-\beta}=\frac{4}{3}>0$となり，不適。

$p=3$のとき，$\frac{z-\beta}{\alpha-\beta}=-\frac{1}{3}<0$となり適する。

したがって，$p=3$

7 (1) **点Pが辺ABの垂直二等分線上にあることより**

$$|z-\alpha|=|z-\beta|$$

両辺を2乗すると

$$|z-\alpha|^2=|z-\beta|^2$$

$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=(z-\beta)(\overline{z}-\overline{\beta})$$

$$z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}=z\overline{z}-\overline{\beta}z-\beta\overline{z}+\beta\overline{\beta}$$

$-\bar{\alpha}z-\alpha\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}=\beta\bar{\beta}-\alpha\bar{\alpha}$

よって

$(\bar{\beta}-\bar{\alpha})z+(\beta-\alpha)\bar{z}=|\beta|^2-|\alpha|^2$

が成り立つ。

(別解)

辺ABの中点をMとすると，点Pが辺ABの垂直二等分線上にあることより

MP⊥AB またはPとMが一致する

すなわち

$\dfrac{z-\frac{\alpha+\beta}{2}}{\beta-\alpha}$ が純虚数または0

となるから

$$\dfrac{z-\frac{\alpha+\beta}{2}}{\beta-\alpha}=-\overline{\left(\dfrac{z-\frac{\alpha+\beta}{2}}{\beta-\alpha}\right)}$$

$$(\bar\beta-\bar\alpha)\left(z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=-(\beta-\alpha)\left(\bar z-\frac{\bar\alpha+\bar\beta}{2}\right)$$

$$(\bar\beta-\bar\alpha)z-\frac12(\beta\bar\beta-\bar\alpha\beta+\alpha\bar\beta-\alpha\bar\alpha)$$

$$=-(\beta-\alpha)\bar z+\frac12(\beta\bar\beta+\bar\alpha\beta-\alpha\bar\beta-\alpha\bar\alpha)$$

したがって

$(\bar\beta-\bar\alpha)z+(\beta-\alpha)\bar z=|\beta|^2-|\alpha|^2$

が成り立つ。

(2) (1)より

$(\bar\beta-\bar\alpha)z+(\beta-\alpha)\bar z=|\beta|^2-|\alpha|^2$ ……①

また，点Pが辺ACの垂直二等分線上にあることより，(1)と同様にして

$(\bar\gamma-\bar\alpha)z+(\gamma-\alpha)\bar z=|\gamma|^2-|\alpha|^2$ ……②

②−①より

$(\bar\gamma-\bar\beta)z+(\gamma-\beta)\bar z=|\gamma|^2-|\beta|^2$

よって，(1)と同様の計算を逆にたどることにより

$|z-\beta|^2=|z-\gamma|^2$

すなわち

$|z-\beta|=|z-\gamma|$

が成り立つ。

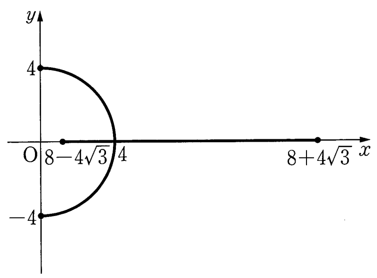
したがって，辺BCの垂直二等分線も点Pを通る。

P.16 入試問題演習

STEP 1

1 (1) **$r=4$ (θは任意) または $\theta=0,\ \pi$ (rは任意)**

(2)



解説 (1) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ より

$\frac1z=\frac1r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$

$=\frac1r(\cos\theta-i\sin\theta)$

であるから

$\frac z4+\frac4z$

$=\frac r4(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac4r(\cos\theta-i\sin\theta)$

$=\left(\frac r4+\frac4r\right)\cos\theta+i\left(\frac r4-\frac4r\right)\sin\theta$

これが実数となるから

$\left(\frac r4-\frac4r\right)\sin\theta=0$

$\frac r4=\frac4r$ ……① または $\sin\theta=0$ ……②

①より，$r^2=16$

$r>0$ より，$r=4$

②と $0\leqq\theta<2\pi$ より，$\theta=0,\ \pi$

したがって

$r=4$ (θは任意)

または

$\theta=0,\ \pi$ (rは任意)

(2) (1)より，$\frac z4+\frac4z$ が実数となるための条件は

$r=4$ または $\theta=0$ または $\theta=\pi$

$r=4$ のとき

$\frac z4+\frac4z=2\cos\theta$

となるので，これが0以上4以下であるための条件は

$0\leqq 2\cos\theta\leqq4$

$0\leqq\cos\theta\leqq2$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$0\leqq\theta\leqq\frac\pi2,\ \frac32\pi\leqq\theta<2\pi$

$\theta=0$ のとき

$\frac z4+\frac4z=\frac r4+\frac4r$

$r>0$ より，$\frac r4+\frac4r\geqq0$ は常に成り立つ。

$\frac r4+\frac4r\leqq4$ より

$r^2-16r+16\leqq0$

$8-4\sqrt3\leqq r\leqq8+4\sqrt3$ ($r>0$を満たす)

$\theta=\pi$ のとき

$\frac z4+\frac4z=-\left(\frac r4+\frac4r\right)$

$r>0$ より $-\left(\frac r4+\frac4r\right)<0$ なので不適。

以上より，r, θが満たすべき条件は

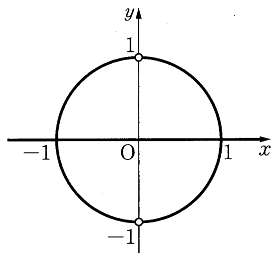
$r=4$ かつ $0\leqq\theta\leqq\frac\pi2,\ \frac32\pi\leqq\theta<2\pi$

または

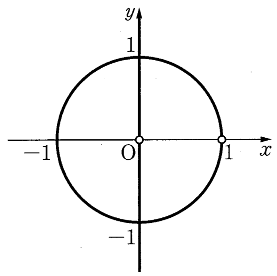
$\theta=0$ かつ $8-4\sqrt3\leqq r\leqq8+4\sqrt3$

となるから，点zが描く図形は解答図の太線部分となる。

2 (1)



(2)



解説 (1) $\frac1{z+i}+\frac1{z-i}=\frac{2z}{z^2+1}$ より，これが実数となるための条件は

$\frac{2z}{z^2+1}=\overline{\left(\frac{2z}{z^2+1}\right)}$

$2z\{(\bar z)^2+1\}=2\bar z(z^2+1)$ $(z\neq\pm i)$

$z^2\bar z-z(\bar z)^2-z+\bar z=0$

$(z\bar z-1)(z-\bar z)=0$

$(|z|^2-1)(z-\bar z)=0$

$|z|^2=1$ または $z=\bar z$

よって，$z\neq\pm i$ かつ

$|z|=1$ または z は実数

となるから，点zが描く図形は解答図の太線部分となる。

(2) $w=\frac{z+i}{z-i}$, $z\neq\pm i$ より

$(z-i)w=z+i,\ w\neq0$

$(w-1)z=i(w+1),\ w\neq0$

$w=1$は等式を満たさないので $w\neq1$であり

$z=\frac{i(w+1)}{w-1}$ ……①

$|z|=1$のとき，①を代入して

$\left|\frac{i(w+1)}{w-1}\right|=1$

$|w+1|=|w-1|$

よって，点wが描く図形は，2点-1と1を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち，虚軸となる。ただし，原点を除く。

$z=\bar z$ のとき，①を代入して

$\frac{i(w+1)}{w-1}=\overline{\left\{\frac{i(w+1)}{w-1}\right\}}$

$i(w+1)(\bar w-1)=-i(\bar w+1)(w-1)$

$(w\neq1)$

展開して整理すると

$w\bar w=1$　$|w|=1$　$(w\neq1)$

よって，点wが描く図形は単位円となる。ただし，点1を除く。

以上より，点wが描く図形は解答図の太線部分となる。

3 (1) $x=\frac{1\pm\sqrt3 i}{2}$

(2) $\frac1\omega$

(3) **正三角形**

解説 (1) $x^6-1=0$ より

$(x^3-1)(x^3+1)=0$

$x^3-1=0$ の解とならないものを考えるので

$x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

xは虚数であるから

$x=\frac{1\pm\sqrt3 i}2$

(2) ωは方程式 $x^3+1=0$ 及び $x^2-x+1=0$ の解であるから

$\begin{cases}\omega^3+1=0 \quad ……①\\ \omega^2-\omega+1=0 \quad ……②\end{cases}$

$\alpha\omega+\beta\omega^5=\gamma$ より，両辺にωをかけて

$\alpha\omega^2+\beta\omega^6=\gamma\omega$

$\alpha(\omega-1)+\beta=\gamma\omega$ (①，②より)

$\beta-\alpha=(\gamma-\alpha)\omega$

したがって

$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac1\omega$

(3) $\omega=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

（複号同順）

であるから，(2)より

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\omega}=\cos\left(\mp\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\mp\frac{\pi}{3}\right)$$

（複号同順）

つまり

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1,\ \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\frac{\pi}{3}$$

したがって，3点α，β，γを頂点とする三角形は正三角形である。

STEP2

1 (1) **点 $-1+i$ を中心とする半径$\frac{1}{2}$の円**

(2) $\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

解説 与えられた条件より

$$|(\cos\theta+i\sin\theta)(z-\alpha)+\alpha|=\frac{1}{2}|\alpha| \quad \cdots\cdots ⊛$$

である。

(1) $\alpha=i$，$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき，⊛より

$$\left|\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z-i)+i\right|=\frac{1}{2}|i|$$

$$|i(z-i)+i|=\frac{1}{2}$$

$$|i(z+1-i)|=\frac{1}{2}$$

$$|z-(-1+i)|=\frac{1}{2}$$

よって，求める図形は

点 $-1+i$ を中心とする半径$\frac{1}{2}$の円

である。

(2) 点αが実軸上にあることより，αは実数であり，⊛より

$$|\cos\theta+i\sin\theta|\left|(z-\alpha)+\frac{\alpha}{\cos\theta+i\sin\theta}\right|$$

$$=\frac{1}{2}|\alpha|$$

$$|(z-\alpha)+\alpha(\cos\theta-i\sin\theta)|=\frac{1}{2}|\alpha|$$

$$|z-\{(1-\cos\theta)\alpha+i\alpha\sin\theta\}|=\frac{1}{2}|\alpha|$$

よって，点zの全体が描く図形は

点 $(1-\cos\theta)\alpha+i\alpha\sin\theta$ を中心とする半径$\frac{1}{2}|\alpha|$の円

となり，これが虚軸に接するとき

$$|(1-\cos\theta)\alpha|=\frac{1}{2}|\alpha|$$

$\alpha\neq0$ より，$|\alpha|\neq0$ であるから

$$|1-\cos\theta|=\frac{1}{2}$$

$\cos\theta\leqq1$ より

$$1-\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$

2 (1) **A，B，Cが正三角形の3頂点であるとき，点Cは点Aを中心として点Bを$\pm\frac{\pi}{3}$だけ回転した点である。つまり**

$$\gamma-\alpha=\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}(\beta-\alpha) \quad \cdots\cdots①$$

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

これより，$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は2次方程式

$$z^2-z+1=0$$

の解となるから

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}+1=0$$

$$(\gamma-\alpha)^2-(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0 \quad \cdots\cdots②$$

$$(\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2)-(\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta+\alpha^2)+(\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)=0$$

したがって

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$

が成り立つ。

(別解)

A，B，Cが正三角形の3頂点であるとき

△ABC∽△BCA ……③

であるから

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}},\ \angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CBA}$$

よって

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$$

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=(\alpha-\beta)(\beta-\alpha) \quad \cdots\cdots④$$

$$\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha+\alpha\beta=-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2$$

したがって

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$

が成り立つ。

(2) (*)が成立するとき，(1)の計算を逆にたどることにより，②が得られる。

$\alpha=\beta$ のとき，②より，$\gamma=\alpha$

よって，$\alpha=\beta=\gamma$

$\alpha\neq\beta$ のとき，さらに(1)の計算を逆にたどることにより，①が得られるから，A，B，Cは正三角形の3頂点となる。

したがって，(*)が成立するとき，A=B=Cとなるか，A，B，Cが正三角形の3頂点となる。

(別解)

(*)が成立するとき，(1)(別解)の計算を逆にたどることにより，④が得られる。

$\alpha=\beta$ のとき，④より，$\gamma=\alpha$ または $\gamma=\beta$

いずれにしても，$\alpha=\beta=\gamma$

$\alpha\neq\beta$ のとき，④より，$\gamma\neq\beta$ であり，さらに(1)(別解)の計算を逆にたどることにより，③が得られるから，A，B，Cは正三角形の3頂点となる。

したがって，(*)が成立するとき，A=B=Cとなるか，A，B，Cが正三角形の3頂点となる。

(別解)

(*)が成立するとき，

$$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha=0$$

$$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$$

$$(\alpha-\beta)^2+\{(\beta-\alpha)+(\alpha-\gamma)\}^2+(\gamma-\alpha)^2=0$$

$$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\alpha)^2+2(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)+(\alpha-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$$

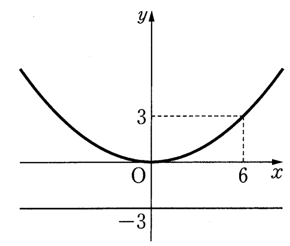
$$(\beta-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)+(\gamma-\alpha)^2=0$$

これは②と同じ式であるから，以下，解答と同様にして，A=B=Cとなるか，A，B，Cは正三角形の3頂点となる。

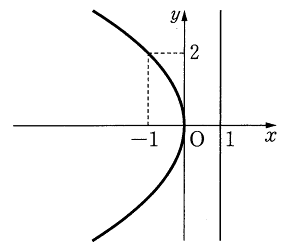
第4講　2次曲線(1)　―放物線―

P.18〜P.19　**類題**

1 (1) $y=\frac{1}{12}x^2$



(2) $x=-\frac{1}{4}y^2$



解説 (1) $p=3$ であるから

$$x^2=4\times3y=12y$$

$$y=\frac{1}{12}x^2$$

(2) $p=-1$ であるから

$$y^2=4\times(-1)x=-4x$$

$$x=-\frac{1}{4}y^2$$

グラフは解答図のようになる。

2 (1) 頂点　$(0,\ 0)$　　焦点　$\left(-\frac{1}{8},\ 0\right)$

準線　$x=\frac{1}{8}$　　軸　$y=0$

(2) 頂点　$(0,\ 0)$　　焦点　$\left(0,\ \frac{1}{24}\right)$

準線　$y=-\frac{1}{24}$　　軸　$x=0$

(3) 頂点　$(3,\ 2)$　　焦点　$\left(\frac{23}{8},\ 2\right)$

準線　$x=\frac{25}{8}$　　軸　$y=2$

解説 (1) $y^2=-\frac{1}{2}x$　　$y^2=4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)x$

ゆえに，$p=-\frac{1}{8}$

よって，頂点　$(0,\ 0)$　　焦点　$\left(-\frac{1}{8},\ 0\right)$

準線 $x=\frac{1}{8}$　軸 $y=0$

(2) $y=6x^2$　$x^2=4\cdot\frac{1}{24}y$

ゆえに，$p=\frac{1}{24}$

よって，頂点 (0, 0)　焦点 $\left(0, \frac{1}{24}\right)$

準線 $y=-\frac{1}{24}$　軸 $x=0$

(3) $x=-2y^2+8y-5=-2(y-2)^2+3$ より

$(y-2)^2=-\frac{1}{2}(x-3)$

これは，(1)の放物線 $y^2=-\frac{1}{2}x$ を x 軸方向に3，y 軸方向に2だけ平行移動したものである。

よって，頂点(3, 2)　焦点 $\left(\frac{23}{8}, 2\right)$

準線 $x=\frac{25}{8}$　軸 $y=2$

3 (1) $(x-3)^2=4(y-2)$
(2) $(y-1)^2=-4(x+4)$

解説 (1) 頂点が(3, 2)，軸が y 軸に平行であることより，求める方程式は

$(x-3)^2=4p(y-2)$

とおくことができる。

これが，点(1, 3)を通るから

$(1-3)^2=4p(3-2)$　$p=1$

したがって，求める方程式は

$(x-3)^2=4(y-2)$

(2) 与えられた条件を満たす放物線の頂点は(−4, 1)である。

この点が原点に移るような平行移動を考えると，焦点は(−1, 0)，準線は $x=1$ に移るから，放物線は

$y^2=4\cdot(-1)x$

すなわち $y^2=-4x$ に移る。

したがって，求める放物線の方程式は

$(y-1)^2=-4(x+4)$

4 $k<\frac{3}{2}$ のとき，2個

$k=\frac{3}{2}$ のとき，1個

$k>\frac{3}{2}$ のとき，0個

解説 2つの方程式から x を消去すると

$y^2=-6(y+k)$

$y^2+6y+6k=0$ ……①

共有点の個数と方程式①の実数解の個数が等しい。①の判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=9-6k=3(3-2k)$

したがって，共有点の個数は

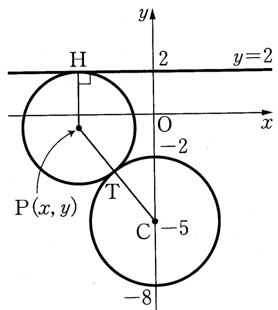
$D>0$ すなわち，$k<\frac{3}{2}$ のとき，2個

$D=0$ すなわち，$k=\frac{3}{2}$ のとき，1個

$D<0$ すなわち，$k>\frac{3}{2}$ のとき，0個

5 焦点が(0, −5)で，準線が $y=5$ の放物線

解説 直線 $y=2$ ……① に接して円 $x^2+(y+5)^2=9$ ……② に外接する円の中心をP(x, y)とし，この円と①，②との接点をそれぞれH，Tとする。また，円②の中心をCとする。



PT=PC−CT=PC−3

これと，PH=PT より

PH=PC−3

PC=PH+3

PH$=2-y$，PC$=\sqrt{x^2+(y+5)^2}$ であるから

$\sqrt{x^2+(y+5)^2}=(2-y)+3$

両辺を平方して整理すると

$x^2=-20y$

したがって，求める軌跡は

焦点が(0, −5)で，準線が $y=5$ の放物線である。

P.20 演習問題

1 (1) $y^2=6x$　(2) $x^2=-24y$

解説 (1) $p=\frac{3}{2}$ より，$y^2=4\cdot\frac{3}{2}x=6x$

(2) $p=-6$ より，$x^2=4\cdot(-6)y=-24y$

2 (1) $(y+3)^2=12(x-2)$
頂点 (2, −3)，焦点 (5, −3)
準線 $x=-1$

(2) $(x-2)^2=-8(y+3)$
頂点 (2, −3)，焦点 (2, −5)
準線 $y=-1$

解説 (1) $y^2=12x=4\cdot3x$

$p=3$

頂点 (0, 0)，焦点 (3, 0)，

準線 $x=-3$

これらを x 軸方向に2，y 軸方向に−3だけ平行移動すると，方程式は

$(y+3)^2=12(x-2)$

頂点 (2, −3)，焦点 (5, −3)

準線 $x=-1$

(2) $x^2=-8y=4\cdot(-2)y$

$p=-2$

頂点 (0, 0)，焦点 (0, −2)，

準線 $y=2$

これらを x 軸方向に2，y 軸方向に−3だけ平行移動すると，方程式は

$(x-2)^2=-8(y+3)$

頂点 (2, −3)，焦点 (2, −5)

準線 $y=-1$

3 $(y-2)^2=-12x$

解説 与えられた条件を満たす放物線の頂点は(0, 2)である。

この点が原点に移るような平行移動を考えると，焦点は(−3, 0)，準線は $x=3$ に移るから，放物線は

$y^2=4\cdot(-3)x$

すなわち $y^2=-12x$ に移る。

したがって，求める放物線の方程式は

$(y-2)^2=-12x$

(別解)

放物線上の点をP(x, y)とすると，焦点と準線からの距離が等しいから

$\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}=|x-3|$

両辺を平方して

$(x+3)^2+(y-2)^2=(x-3)^2$

$(y-2)^2=(x-3)^2-(x+3)^2$

$(y-2)^2=-12x$

4 $-\sqrt{2}<k<0$，$0<k<\sqrt{2}$

解説 $y^2=8x$ より，$x=\frac{y^2}{8}$

これを $y=k(x+1)$ に代入して整理すると

$ky^2-8y+8k=0$

これが異なる2つの実数解をもつことから $k\neq0$ かつ，判別式を D として

$\frac{D}{4}=8(2-k^2)>0$

すなわち，$k\neq0$，$k^2-2<0$ である。

したがって，$-\sqrt{2}<k<0$，$0<k<\sqrt{2}$

5 $8\sqrt{5}$

解説 $y=\frac{1}{2}x$ ……①

$y^2=4x$ ……②

とおくと

①より，$x=2y$ ……③

これを②に代入すると

$y^2=8y$

$y(y-8)=0$

ゆえに，$y=0, 8$

③より，$y=0$ のとき，$x=0$

$y=8$ のとき，$x=16$

したがって，直線と放物線の共有点は(0, 0)，(16, 8)となるから，切り取る線分の長さは

$\sqrt{16^2+8^2}=\sqrt{8^2(2^2+1)}=8\sqrt{5}$

6 直線 $y=2$ の $x>\frac{1}{2}$ の部分

解説 $y=2x$ に平行な直線を $y=2x+k$ とおき，この直線と放物線 $y^2=8x$ との交点を，P(x_1, y_1)，Q(x_2, y_2)とする。

2つの式から x を消去すると

$y^2-4y+4k=0$

で，y_1，y_2 はこの方程式の解である。

この方程式が2つの異なる実数解をもつから，判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=4-4k>0$ より，$k<1$

また，解と係数の関係から

$y_1+y_2=4$

よって，線分PQの中点をM(X, Y)とすると

$Y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4}{2}=2$

$Y=2X+k$ より

$X=\frac{1}{2}(Y-k)=\frac{1}{2}(2-k)=1-\frac{1}{2}k$

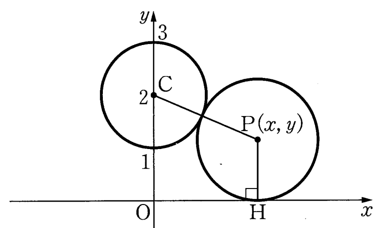
$k<1$ より

$X=1-\frac{1}{2}k>\frac{1}{2}$

したがって，求める軌跡は，直線 $y=2$ の $x>\frac{1}{2}$ の部分である。

7 放物線 $x^2=6\left(y-\frac{1}{2}\right)$

解説



円 $x^2+(y-2)^2=1$ の中心(0, 2)をC，点Pの座標を(x, y)，点Pから x 軸にひいた垂線をPHとすると，2つの円が外接するから

CP=PH+1

$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=y+1$

両辺を平方して

$x^2+(y-2)^2=(y+1)^2$

$x^2+y^2-4y+4=y^2+2y+1$

$x^2=6y-3=6\left(y-\frac{1}{2}\right)$

したがって，求める軌跡は

放物線 $x^2=6\left(y-\frac{1}{2}\right)$

P.21 入試問題演習

STEP 1

1 ア $\frac{1}{2}(y+1)^2-\frac{1}{2}$　イ $y+1$　ウ $x+\frac{1}{2}$

エ $\frac{1}{2}$　オ $(0,\ -1)$　カ -1

解説 ①を変形すると

$x=\frac{1}{2}y^2+y=\frac{1}{2}(y+1)^2-\frac{1}{2}$

さらに

$2x=(y+1)^2-1$

$(y+1)^2=2x+1$

$=4\cdot\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)$

よって，$Y=y+1$，$X=x+\frac{1}{2}$，$p=\frac{1}{2}$

とおくと，$Y^2=4pX$ の形に変形できる。

したがって，放物線①は放物線 $y^2=2x$ を x 軸方向に $-\frac{1}{2}$，y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。

よって，放物線 $y^2=2x$ の焦点が，$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，準線が $x=-\frac{1}{2}$ であることから，放物線①の焦点は $(0,\ -1)$，準線は $x=-1$ である。

2 ア $\frac{1}{6}$　イ $-\frac{1}{3}$

解説 条件を満たす点を $(x,\ y)$ とすると

$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=|y+2|$

両辺を平方して

$(x-1)^2+(y-1)^2=(y+2)^2$

$x^2-2x+1+y^2-2y+1=y^2+4y+4$

$6y=x^2-2x-2$

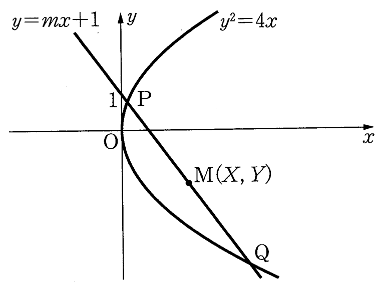
$y=\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

ゆえに，$a=\frac{1}{6}$，$b=-\frac{1}{3}$

3 (1) $X=\frac{2-m}{m^2}$，$Y=\frac{2}{m}$

(2) $x=\frac{1}{2}y(y-1)$　$(y<0,\ 2<y)$

解説 (1)



$y=mx+1$ と $y^2=4x$ から x を消去すると

$my^2-4y+4=0$

この方程式の解が点P，Qの y 座標であるから，$m\neq0$ であり，判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=4(1-m)>0$

よって

$m<0,\ 0<m<1$ ……①

である。

2次方程式の解を y_1，y_2 とすると解と係数の関係より

$y_1+y_2=\frac{4}{m}$

であるから

$Y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2}{m}$

また，Mは直線 $y=mx+1$ 上にあるから

$Y=mX+1$

すなわち

$X=\frac{1}{m}(Y-1)=\frac{1}{m}\left(\frac{2}{m}-1\right)=\frac{2-m}{m^2}$

したがって，$X=\frac{2-m}{m^2}$，$Y=\frac{2}{m}$

(2) (1)より

$X=\frac{1}{m}\left(\frac{2}{m}-1\right)$

$=\frac{1}{2}Y(Y-1)$

ただし，$m=\frac{2}{Y}$ だから①より，

$\frac{2}{Y}<0,\ 0<\frac{2}{Y}<1$

すなわち，$Y<0$，$2<Y$ である。

したがって，点 $\mathrm{M}(X,\ Y)$ の軌跡の方程式は

$x=\frac{1}{2}y(y-1)$　$(y<0,\ 2<y)$

である。

4 $\left(-\frac{a}{2},\ \pm\sqrt{2a^2-a-1}\right)$

解説 C_1 の方程式は

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x-a|$

両辺を平方して

$(x-1)^2+y^2=(x-a)^2$

$y^2=(x-a)^2-(x-1)^2$

$=2(1-a)x+a^2-1$ ……①

C_2 の方程式は

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x+2a|$

両辺を平方して

$(x-1)^2+y^2=(x+2a)^2$

$y^2=(x+2a)^2-(x-1)^2$

$=2(1+2a)x+4a^2-1$ ……②

①，②より

$2(1-a)x+a^2-1=2(1+2a)x+4a^2-1$

整理すると

$3a(2x+a)=0$

$3a>3$ であるから

$2x+a=0$

$x=-\frac{a}{2}$

①に代入すると

$y^2=2a^2-a-1$

$=(2a+1)(a-1)$

$a>1$ であるから

$2a^2-a-1>0$

したがって，2つの放物線 C_1，C_2 の交点の座標は，$\left(-\frac{a}{2},\ \pm\sqrt{2a^2-a-1}\right)$ である。

STEP 2

1 **OPの方程式を $y=ax$ $(a\neq0)$ とすると，OQの方程式は $y=-\frac{1}{a}x$ である。**

$y^2=4px$ と $y=ax$ を連立して解くと，$x\neq0$ のとき

$(x,\ y)=\left(\frac{4p}{a^2},\ \frac{4p}{a}\right)$ ……①

これが，点Pの座標である。

点Qの座標は①で a のかわりに $-\frac{1}{a}$ とおいて，

$(4pa^2,\ -4pa)$ である。

直線PQの方程式は

$\left(4pa^2-\frac{4p}{a^2}\right)(y+4pa)=\left(-4pa-\frac{4p}{a}\right)(x-4pa^2)$

$4p\left(\frac{a^4-1}{a^2}\right)(y+4pa)=-4p\left(\frac{a^2+1}{a}\right)(x-4pa^2)$

$p\neq0$，$a^2+1\neq0$ に注意して，整理すると

$(a^2-1)y=a(4p-x)$

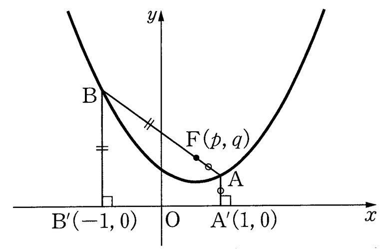
$x=4p$，$y=0$ とすると，a の値にかかわらず等式が成り立つ。

したがって，PQは定点 $(4p,\ 0)$ を通る。

2 (1) $(\cos\theta,\ \sin\theta)$

(2) $2y\sin\theta=x^2-2x\cos\theta+1$

解説 (1)



焦点の座標を $\mathrm{F}(p,\ q)$ とし，A，Bから x 軸にひいた垂線と x 軸との交点をそれぞれA′，B′とすると

AF=AA′ より

$(p-1)^2+\left(q-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2=\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

$p^2-2p+1+q^2-\frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\theta}q=0$ ……①

BF=BB′ より

$(p+1)^2+\left(q-\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2=\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

$p^2+2p+1+q^2-\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta}q=0$ ……②

②−①より

$4p+\left\{\frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\theta}-\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\right\}q=0$

$4p-4q\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=0$

$q=p\tan\theta$ ……③

これを①に代入すると

$p^2-2p+1+p^2\tan^2\theta-\frac{2(1-\cos\theta)}{\cos\theta}p=0$

両辺に $\cos^2\theta$ をかけると

$p^2\cos^2\theta-2p\cos^2\theta+\cos^2\theta+p^2\sin^2\theta-2(\cos\theta-\cos^2\theta)p=0$

$p^2-2p\cos\theta+\cos^2\theta=0$

$(p-\cos\theta)^2=0$

ゆえに，$p=\cos\theta$

③に代入して，$q=\sin\theta$

したがって，焦点の座標は

$(\cos\theta,\ \sin\theta)$

(2) 放物線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，PFと点Pの y 座標の絶対値が等しいから

$(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=y^2$

$x^2-2x\cos\theta+\cos^2\theta+y^2-2y\sin\theta+\sin^2\theta=y^2$

$2y\sin\theta=x^2-2x\cos\theta+1$

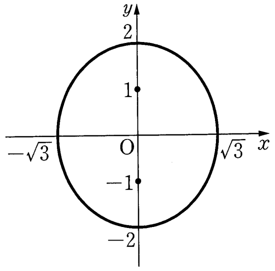
第5講　2次曲線(2)　—楕円—

P.23〜P.24　類題

1 (1) **焦点　(0, 1), (0, −1)**

長軸の長さ　4　　短軸の長さ　$2\sqrt{3}$

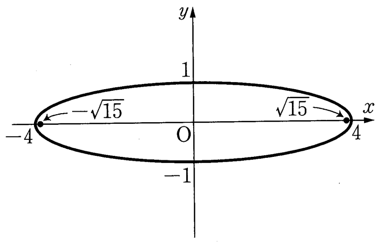
座標軸との交点　$(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, 2)$, $(0, -2)$



(2) **焦点　$(\sqrt{15}, 0)$, $(-\sqrt{15}, 0)$**

長軸の長さ　8　　短軸の長さ　2

座標軸との交点　(4, 0), (−4, 0), (0, 1), (0, −1)



解説 (1) $\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ ……① であるから

$a=\sqrt{3}$, $b=2$

$\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$ より，焦点の座標は

(0, 1), (0, −1)

長軸の長さは，$2\cdot 2=4$

短軸の長さは，$2\sqrt{3}$

座標軸との交点は，①で

$x=0$ とおくと，$y=\pm 2$

$y=0$ とおくと，$x=\pm\sqrt{3}$

したがって，座標軸との交点の座標は

$(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, 2)$, $(0, -2)$

(2) $\frac{x^2}{4^2}+y^2=1$ ……② と変形できるから

$a=4$, $b=1$

$\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ より，焦点の座標は

$(\sqrt{15}, 0)$, $(-\sqrt{15}, 0)$

長軸の長さは，$2\cdot 4=8$

短軸の長さは，$2\cdot 1=2$

座標軸との交点は，②で

$x=0$ とおくと，$y=\pm 1$

$y=0$ とおくと，$x=\pm 4$

したがって，座標軸との交点の座標は

(4, 0), (−4, 0), (0, 1), (0, −1)

概形は解答図のようになる。

2 (1) $\frac{x^2}{80}+\frac{y^2}{81}=1$

(2) $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{25}=1$

解説 (1) 楕円の方程式を $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$ とすると

2定点からの距離の和が18だから

$2b=18$　$b=9$

焦点の座標が$(0, \pm 1)$であるから

$9^2-a^2=1^2$

$a^2=9^2-1^2=80$

したがって，楕円の方程式は

$\frac{x^2}{80}+\frac{y^2}{81}=1$

(2) 楕円の方程式を $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ とすると

焦点の座標が$(\pm\sqrt{5}, 0)$より

$a^2-b^2=(\sqrt{5})^2$ ……①

短軸の長さが10であるから

$2b=10$　$b=5$

これを①に代入すると

$a^2-25=5$　$a^2=30$

したがって，楕円の方程式は

$\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{25}=1$

3 (1) **$(1, 2+\sqrt{2})$, $(1, 2-\sqrt{2})$**

(2) **(3, −5), (−3, −5)**

解説 (1) 楕円 $\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y-2)^2}{10}=1$ ……① は，楕円 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{10}=1$ ……② を

x 軸方向に1，y 軸方向に2

だけ平行移動したものである。

②の焦点の座標を求めると，$\sqrt{10-8}=\sqrt{2}$ より

$(0, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2})$

となる。

したがって，①の焦点の座標は

$(1, 2+\sqrt{2})$, $(1, 2-\sqrt{2})$

(2) 与えられた楕円の方程式を変形すると

$\frac{x^2}{15}+\frac{(y+5)^2}{6}=1$ ……①

これは，楕円 $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$ ……② を

y 軸方向に -5

だけ平行移動したものである。

②の焦点の座標を求めると，$\sqrt{15-6}=3$ より

(3, 0), (−3, 0)

となる。

したがって，①の焦点の座標は

(3, −5), (−3, −5)

P.25　演習問題

1 (1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　(2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

(3) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$　(4) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$

(5) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$

解説 (1) 距離の和が10より，$2a=10$

$a=5$

焦点が$(\pm 4, 0)$より

$5^2-b^2=4^2$

$b^2=9$

求める楕円の方程式は

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

(2) 距離の和が10より，$2b=10$

$b=5$

焦点が$(0, \pm 3)$より

$5^2-a^2=3^2$

$a^2=16$

求める楕円の方程式は

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

(3) 短軸の長さが4より，$2b=4$

$b=2$

焦点が$(\pm 1, 0)$より

$a^2-2^2=1^2$

$a^2=5$

求める楕円の方程式は

$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

(4) 与えられた条件より

$a^2-b^2=3$ ……①

$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$

$a^2+4b^2=a^2b^2$ ……②

①，②より，$a^2=6$, $b^2=3$

求める楕円の方程式は

$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$

(5) $3x^2+5y^2=15$

$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$

焦点の座標は，$(\pm\sqrt{2}, 0)$

長軸の長さは6より，$2a=6$　$a=3$

$3^2-b^2=(\sqrt{2})^2$ より

$b^2=7$

求める楕円の方程式は

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$

2 (1) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$

焦点　(6, −3), (−2, −3)

(2) $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$

焦点　(2, 0), (2, −6)

解説 (1) 元の楕円の焦点は，(4, 0), (−4, 0)

これを平行移動する。

(2) 元の楕円の焦点は，(0, 3), (0, −3)

これを平行移動する。

3 $9x^2+4y^2+18x-8y-23=0$

$9(x^2+2x)+4(y^2-2y)-23=0$

$9(x+1)^2+4(y-1)^2=36$

$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

これは楕円 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ……①

を，x 軸方向に -1，y 軸方向に1だけ平行移動した楕円である。

焦点　$(-1, 1+\sqrt{5})$, $(-1, 1-\sqrt{5})$

解説 ①の焦点は$(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$であるから，この楕円の焦点は

$(-1, 1+\sqrt{5})$, $(-1, 1-\sqrt{5})$

4 $-\sqrt{7}<k<\sqrt{7}$

解説 楕円の方程式は $3x^2+4y^2=12$ だから，この式に $y=x+k$ を代入すると

$3x^2+4(x+k)^2=12$

$7x^2+8kx+4k^2-12=0$

楕円と直線が異なる2点で交わるから，判別式をDとして

$\frac{D}{4}=16k^2-7(4k^2-12)$

$=12(7-k^2)>0$

$k^2-7<0$

ゆえに，$-\sqrt{7}<k<\sqrt{7}$

5 **直線 $y=-\frac{4}{5}x$ の $-\frac{5}{3}<x<\frac{5}{3}$ の部分**

解説 楕円の方程式に $y=x+k$ を代入して，整理すると

$9x^2+10kx+5k^2-20=0$

楕円と直線が異なる2点で交わるから，判別

式をDとして

$$\frac{D}{4}=25k^2-9(5k^2-20)$$
$$=20(9-k^2)>0$$

$k^2-9<0$ より

$$-3<k<3$$

このとき，2つの交点P，Qのx座標をx_1，x_2とし，点Rの座標を$(X,\ Y)$とすると

$$X=\frac{x_1+x_2}{2},\quad Y=X+k$$

解と係数の関係より

$x_1+x_2=-\frac{10}{9}k$ だから

$$X=-\frac{5}{9}k$$
$$Y=-\frac{5}{9}k+k=\frac{4}{9}k$$

2式からkを消去すると

$$Y=-\frac{4}{5}X$$

ここで，$-3<k<3$ であるから

$$-\frac{5}{3}<X<\frac{5}{3}$$

したがって，求める軌跡は

直線 $y=-\frac{4}{5}x$ の $-\frac{5}{3}<x<\frac{5}{3}$ の部分

6 $\boldsymbol{X=6x,\ Y=3y}$ **より**

$$\boldsymbol{x=\frac{X}{6},\quad y=\frac{Y}{3}}$$

点P$(x,\ y)$は，円 $x^2+y^2=1$ 上を動くから

$$\boldsymbol{\left(\frac{X}{6}\right)^2+\left(\frac{Y}{3}\right)^2=1}$$
$$\boldsymbol{\frac{X^2}{36}+\frac{Y^2}{9}=1}$$

したがって，点Qの描く曲線は $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ だから楕円である。

焦点　$(3\sqrt{3},\ 0)$，$(-3\sqrt{3},\ 0)$

解説　焦点の座標は，$(\pm\sqrt{36-9},\ 0)$より

$(\pm3\sqrt{3},\ 0)$

7 **楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$**

解説　点A，Bの座標をそれぞれ$(a,\ 0)$，$(0,\ b)$，点Pの座標を$(x,\ y)$とすると，点PはABを$2:3$に内分するから

$$x=\frac{3a+2\cdot0}{2+3}=\frac{3}{5}a \qquad a=\frac{5}{3}x$$
$$y=\frac{3\cdot0+2\cdot b}{2+3}=\frac{2}{5}b \qquad b=\frac{5}{2}y$$

これを $a^2+b^2=5^2$ に代入すると

$$\left(\frac{5}{3}x\right)^2+\left(\frac{5}{2}y\right)^2=25$$

ゆえに，$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

P.26　入試問題演習

STEP 1

1　ア　36　　イ　32　　ウ　1

解説　条件を満たす点の座標を$(x,\ y)$とすると

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=12$$
$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=12-\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

両辺を平方して

$$x^2-6x+9+y^2$$
$$=144-24\sqrt{(x+1)^2+y^2}+x^2+2x+1+y^2$$

これを整理すると，$3\sqrt{(x+1)^2+y^2}=x+17$

再び両辺を平方すると

$$9(x^2+2x+1+y^2)=x^2+34x+289$$
$$9x^2+18x+9+9y^2=x^2+34x+289$$
$$8x^2-16x+9y^2=280$$
$$8(x-1)^2+9y^2=288$$

ゆえに，$\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$

よって，$p=36$，$q=32$，$r=1$

(注)

2点$(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$からの距離の和が12である点Pの軌跡を求め，その軌跡をx軸方向に1だけ平行移動してもよい。

2　(1)　$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

(2)　$\boldsymbol{\frac{(x+k)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1}$

(3)　$\boldsymbol{k<-\sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{a^2+b^2}<k}$

解説(1)　点Pの座標を$(x,\ y)$，点Qの座標を$(X,\ Y)$とすると

$$X=x$$

$Y=\frac{b}{a}y$ より，$y=\frac{a}{b}Y$

したがって

$$x^2+y^2=X^2+\left(\frac{a}{b}Y\right)^2=a^2$$
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

よって，C_1を表す方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots①$$

(2)　点Q$(x,\ y)$の直線$y=x+k$に関して対称な点をQ′$(X',\ Y')$とすると

線分QQ′と直線$y=x+k$が直交するから

$$\frac{y-Y'}{x-X'}=-1$$
$$x+y=X'+Y' \quad \cdots\cdots②$$

線分QQ′の中点$\left(\frac{x+X'}{2},\ \frac{y+Y'}{2}\right)$が直線$y=x+k$上にあるから

$$\frac{y+Y'}{2}=\frac{x+X'}{2}+k$$
$$x-y=-X'+Y'-2k \quad \cdots\cdots③$$

②，③より，$x=Y'-k$，$y=X'+k$

これを①に代入すると

$$\frac{(Y'-k)^2}{a^2}+\frac{(X'+k)^2}{b^2}=1$$

よって，C_2を表す方程式は

$$\frac{(x+k)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \quad \cdots\cdots④$$

(3)　$y=x+k$ を④に代入して整理すると

$$(a^2+b^2)x^2+2a^2kx+a^2(k^2-b^2)=0$$

直線$y=x+k$とC_2が共有点をもたないから，判別式をDとして

$$\frac{D}{4}=a^4k^2-a^2(a^2+b^2)(k^2-b^2)$$
$$=a^2b^2(a^2+b^2-k^2)<0$$

ゆえに，$k<-\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{a^2+b^2}<k$

3　8

解説　長方形の第1象限にある頂点を$(a,\ b)$，長方形の面積をSとすると

$$S=4ab$$
$$\frac{a^2}{16}+b^2=1$$

ただし，$0<a<4$，$0<b<1$

ここで，相加平均と相乗平均の関係を用いると

$$\frac{a^2}{16}+b^2\geqq2\sqrt{\frac{a^2}{16}\cdot b^2}=\frac{1}{2}ab$$
$$1\geqq\frac{1}{8}S$$
$$S\leqq8$$

が成り立つ。

等号が成り立つのは，$\frac{a^2}{16}=b^2$ かつ $\frac{a^2}{16}+b^2=1$ および $0<a<4$，$0<b<1$ より

$$a=2\sqrt{2},\quad b=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

のときである。

したがって，長方形の面積は

$a=2\sqrt{2}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，最大値8をとる。

4　(1)　$\boldsymbol{-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}}$

(2)　$\boldsymbol{y=\frac{x}{2},\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}}$

解説(1)　$y=-\frac{1}{2}x+k$ と $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ より，yを消去して整理すると

$$x^2-2kx+2(k^2-1)=0$$

2点で交わるから，判別式をDとして

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-1)$$
$$=2-k^2>0$$

ゆえに，$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$　……①

(2)　P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$とすると

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=k$$
$$y=-\frac{1}{2}x+k$$

2式からkを消去すると，$y=\frac{x}{2}$

①と$x=k$より，$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

したがって，Rの軌跡は，直線$y=\frac{x}{2}$の$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$の部分である。

STEP 2

1　(1)　$\boldsymbol{-\sqrt{13}<k<\sqrt{13}}$

(2)　$\boldsymbol{k=\pm\frac{\sqrt{26}}{2}}$，**面積　3**

解説(1)　2つの式を連立させると

$$4x^2+9(x+k)^2=36$$
$$13x^2+18kx+9k^2-36=0 \quad \cdots\cdots①$$

これが異なる2つの実数解をもつから，判別式をDとして

$$\frac{D}{4}=(9k)^2-13(9k^2-36)$$
$$=36(13-k^2)>0$$

ゆえに，$k^2-13<0$

$$-\sqrt{13}<k<\sqrt{13}$$

(2)　①の2つの実数解をα，β $(\beta<\alpha)$ としてP$(\alpha,\ \alpha+k)$，Q$(\beta,\ \beta+k)$とする。

また，△OPQの面積をSとすると

$$S=\frac{1}{2}|\alpha(\beta+k)-\beta(\alpha+k)|$$
$$=\frac{1}{2}|(\alpha-\beta)k|$$

①の解は，$x=\frac{-9k\pm6\sqrt{13-k^2}}{13}$ だから

$$\alpha-\beta=\frac{12\sqrt{13-k^2}}{13}$$

よって

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{12\sqrt{13-k^2}}{13}\cdot k\right|$$
$$=\frac{6}{13}\sqrt{13k^2-k^4}$$

$=\frac{6}{13}\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2-\left(k^2-\frac{13}{2}\right)^2}$

したがって，$-\sqrt{13}<k<\sqrt{13}$，$k\neq 0$ より，

S は

$k^2=\frac{13}{2}$

$k=\pm\frac{\sqrt{26}}{2}$

のとき，最大値 $\frac{6}{13}\cdot\frac{13}{2}=3$ をとる。

2 $0\leqq p\leqq\frac{9}{5}$ のとき，$\frac{4}{3}\sqrt{9-p^2}$

$\frac{9}{5}<p\leqq 5$ のとき，$5-p$

解説 $PQ^2=(x-p)^2+y^2$

$=(x-p)^2+16\left(1-\frac{x^2}{25}\right)$

$=\frac{9}{25}x^2-2px+p^2+16$

$=\frac{9}{25}\left(x-\frac{25}{9}p\right)^2+16-\frac{16}{9}p^2$

$-5\leqq x\leqq 5$ であるから，PQ^2 は

$0\leqq\frac{25}{9}p\leqq 5$　すなわち，$0\leqq p\leqq\frac{9}{5}$ のとき，

$x=\frac{25}{9}p$ で最小値 $16-\frac{16}{9}p^2$ をとる。

$5<\frac{25}{9}p$　すなわち，$\frac{9}{5}<p\leqq 5$ のとき，

$x=5$ で最小値 $25-10p+p^2$ をとる。

したがって，PQの最小値は

$0\leqq p\leqq\frac{9}{5}$ のとき

$\sqrt{16-\frac{16}{9}p^2}=\frac{4}{3}\sqrt{9-p^2}$

$\frac{9}{5}<p\leqq 5$ のとき

$\sqrt{25-10p+p^2}=5-p$

第6講　2次曲線(3)　―双曲線―

P.28〜P.29　類題

1 (1) 頂点　$(0,\ \sqrt{5})$，$(0,\ -\sqrt{5})$

焦点　$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$

漸近線　$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$

(2) 頂点　$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$

焦点　$(0,\ 4)$，$(0,\ -4)$

漸近線　$y=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}x$

(3) 頂点　$(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$

焦点　$(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$

漸近線　$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

解説 (1) 頂点は $x=0$ とおくと

$y^2=5$　　$y=\pm\sqrt{5}$

よって，$(0,\ \sqrt{5})$ と $(0,\ -\sqrt{5})$

焦点は $a=2$，$b=\sqrt{5}$ より，$\sqrt{4+5}=3$ であるから

$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$

漸近線の方程式は，$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$

(2) $-9x^2+7y^2=63$ を変形して

$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=-1$

頂点は $x=0$ とおくと

$y^2=9$　　$y=\pm3$

よって，$(0,\ 3)$ と $(0,\ -3)$

焦点は $a=\sqrt{7}$，$b=3$ より，$\sqrt{7+9}=4$ であるから

$(0,\ 4)$，$(0,\ -4)$

漸近線の方程式は，$y=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}x$

(3) 頂点は $y=0$ とおくと

$x^2=3$　　$x=\pm\sqrt{3}$

よって，$(\sqrt{3},\ 0)$ と $(-\sqrt{3},\ 0)$

焦点は $a=\sqrt{3}$，$b=1$ より，$\sqrt{3+1}=2$ であるから

$(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$

漸近線の方程式は，$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

2 (1) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=-1$

(2) $x^2-y^2=-1$

(3) $x^2-\frac{y^2}{24}=1$

解説 (1) 双曲線の方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

$(a>0,\ b>0)$ とすると

2定点からの距離の差が4だから

$2b=4$

2点は焦点だから

$\sqrt{a^2+b^2}=3$

2つの式から

$a=\sqrt{5}$，$b=2$

方程式は，$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=-1$

(2) 双曲線の方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

$(a>0,\ b>0)$ とすると

焦点が $(0,\ \sqrt{2})$，$(0,\ -\sqrt{2})$ だから

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$

点 $(\sqrt{3},\ 2)$ を通るから

$\frac{3}{a^2}-\frac{4}{b^2}=-1$

よって

$a^2+b^2=2$，$3b^2-4a^2=-a^2b^2$

これを解くと

$a=1$，$b=1$

方程式は，$x^2-y^2=-1$

(3) 双曲線の方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$(a>0,\ b>0)$ とすると

焦点が $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ だから

$\sqrt{a^2+b^2}=5$

漸近線が $y=\pm2\sqrt{6}x$ であるから

$\frac{b}{a}=2\sqrt{6}$

よって

$a^2+b^2=25$，$b=2\sqrt{6}a$

これを解くと

$a=1$，$b=2\sqrt{6}$

方程式は

$x^2-\frac{y^2}{24}=1$

3 焦点　$(-1,\ 3+\sqrt{6})$，$(-1,\ 3-\sqrt{6})$

漸近線　$y=\sqrt{2}x+3+\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}x+3-\sqrt{2}$

解説 双曲線 $\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{(y-3)^2}{4}=-1$ ……① は，

双曲線 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=-1$ ……② を

x 軸方向に -1，y 軸方向に3だけ平行移動したものである。

②の焦点の座標を求めると，$\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$ より，$(0,\ \sqrt{6})$，$(0,\ -\sqrt{6})$

さらに，②の漸近線は $y=\pm\sqrt{2}x$

したがって，①の焦点の座標は

$(-1,\ 3+\sqrt{6})$，$(-1,\ 3-\sqrt{6})$

漸近線の方程式は，$y-3=\pm\sqrt{2}(x+1)$

すなわち

$y=\sqrt{2}x+3+\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}x+3-\sqrt{2}$

P.30　演習問題

1 (1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$　(2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$

(3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　(4) $x^2-\frac{y^2}{8}=1$

(5) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$

解説 (1) 距離の差が8より，$2a=8$

$a=4$

焦点が $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ より

$\sqrt{a^2+b^2}=5$

よって，$b^2=9$　　$b=3$

(2) (1)と同じように考える。

$2b=6$

$b=3$

焦点が $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$ より

$\sqrt{a^2+b^2}=5$

よって，$a^2=16$　　$a=4$

(3) 焦点が $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ より

$\sqrt{a^2+b^2}=4$

頂点が $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ より

$a=2$

よって，$b^2=12$　　$b=2\sqrt{3}$

(4) 焦点が $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ より

$\sqrt{a^2+b^2}=3$

漸近線が $y=\pm2\sqrt{2}x$ より

$\frac{b}{a}=2\sqrt{2}$

2式より，$a=1$，$b=2\sqrt{2}$

(5) 焦点が $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ より

$\sqrt{a^2+b^2}=2$

直角双曲線より，$a=b$

よって，$a=b=\sqrt{2}$

2 (1) $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$

焦点の座標　$(6,\ -2)$，$(-4,\ -2)$

(2) $\frac{(x-1)^2}{20}-\frac{(y+2)^2}{16}=-1$

焦点の座標　$(1,\ 4)$，$(1,\ -8)$

解説 (1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ の焦点は，$\sqrt{16+9}=5$

より，$(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$

平行移動後の焦点は

$(6,\ -2)$，$(-4,\ -2)$

(2) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=-1$ の焦点は，$\sqrt{20+16}=6$

より，$(0,\ 6)$，$(0,\ -6)$

平行移動後の焦点は，$(1,\ 4)$，$(1,\ -8)$

3 $x^2-4y^2-4x+8y-4=0$

$x^2-4x+4-4(y^2-2y+1)=4$

$(x-2)^2-4(y-1)^2=4$

$\frac{(x-2)^2}{4}-(y-1)^2=1$

これは双曲線 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ ……① を x 軸方向に2，y 軸方向に1だけ平行移動したものである。

焦点 $(\sqrt{5}+2,\ 1)$，$(-\sqrt{5}+2,\ 1)$

頂点 $(4,\ 1)$，$(0,\ 1)$

解説 ①の焦点は，$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

頂点は，$(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$

であるから，平行移動後の焦点は

$(\sqrt{5}+2,\ 1)$，$(-\sqrt{5}+2,\ 1)$

頂点は，$(4,\ 1)$，$(0,\ 1)$である。

4 $k<-\sqrt{19}$，$\sqrt{19}<k$ のとき，2個

$k=\pm\sqrt{19}$ のとき，1個

$-\sqrt{19}<k<\sqrt{19}$ のとき，0個

解説 $y=2x+k$ を $x^2-5y^2=5$ に代入すると

$x^2-5(2x+k)^2=5$

展開して整理すると

$19x^2+20kx+5(k^2+1)=0$

となるから，判別式をDとして

$\frac{D}{4}=100k^2-19\cdot5(k^2+1)$

$=5(k^2-19)$

$D>0$ のとき，すなわち $k<-\sqrt{19}$，$\sqrt{19}<k$ のとき，共有点は2個

$D=0$ のとき，すなわち $k=\pm\sqrt{19}$ のとき，共有点は1個

$D<0$ のとき，すなわち $-\sqrt{19}<k<\sqrt{19}$ のとき，共有点は0個

5 (1) 焦点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$

漸近線 $y=\pm\frac{3}{4}x$

(2) $k=\pm\frac{144}{25}a^2$

解説 (1) $k=144$ のとき

$9x^2-16y^2=144$

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

$\sqrt{16+9}=5$ より，焦点の座標は

$(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$

漸近線は，$y=\pm\frac{3}{4}x$

(2) (i) $k>0$ のとき

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{k}}{3}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{k}}{4}\right)^2}=1$$

焦点間の距離が$2a$だから，焦点は

$(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$である。

よって

$a=\sqrt{\frac{k}{9}+\frac{k}{16}}=\frac{5}{12}\sqrt{k}$

$k=\frac{144}{25}a^2$

(ii) $k<0$ のとき

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{-k}}{3}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{-k}}{4}\right)^2}=-1$$

焦点は$(0,\ a)$，$(0,\ -a)$より

$a=\sqrt{\left(\frac{-k}{9}\right)+\left(\frac{-k}{16}\right)}=\frac{5}{12}\sqrt{-k}$

$k=-\frac{144}{25}a^2$

6 双曲線 $x^2-y^2=9$ の点$(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$を除く部分

解説 点P，Qの座標をそれぞれ$(a,\ b)$，$(a,\ -b)$ $(a\neq\pm3)$ とすると，$a^2+b^2=9$ ……⊛

直線APの方程式は，$y=\frac{b}{a-3}(x-3)$ ……①

直線BQの方程式は，$y=\frac{-b}{a+3}(x+3)$ ……②

である。

①，②より

$(a-3)y=b(x-3)$ ……③

$(a+3)y=-b(x+3)$ ……④

③−④ より，$-6y=2bx$

ここで$x=0$とすると，$y=0$

さらに③より，$b=0$となるが，このとき⊛より$a=\pm3$となり，$a\neq\pm3$に反する。

よって，$x\neq0$であり

$b=-\frac{3y}{x}$

これを③に代入して整理すると

$ay=\frac{9y}{x}$

ここで，$y=0$とすると，$b=-\frac{3y}{x}=0$となり不適。

よって，$y\neq0$であり

$a=\frac{9}{x}$ （$a\neq\pm3$ より $x\neq\pm3$）

したがって，$a=\frac{9}{x}$，$b=-\frac{3y}{x}$ となるから，⊛に代入して

$\left(\frac{9}{x}\right)^2+\left(-\frac{3y}{x}\right)^2=9$

これを整理して，$x^2-y^2=9$を得る。

ただし，$(x,\ y)\neq(\pm3,\ 0)$である。

7 2組の双曲線 $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{25}-\frac{y^2}{100}=\pm1$

解説 点Pの座標を$(x,\ y)$，点Pと直線$y=2x+1$，$y=-2x-1$の距離をそれぞれd_1，d_2とすると

$d_1=\frac{|2x-y+1|}{\sqrt{5}}$

$d_2=\frac{|2x+y+1|}{\sqrt{5}}$

よって

$d_1d_2=\frac{|(2x-y+1)(2x+y+1)|}{5}$

$=\frac{|(2x+1)^2-y^2|}{5}=20$

$(2x+1)^2-y^2=\pm100$

$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{25}-\frac{y^2}{100}=\pm1$

P.31 **入試問題演習**

STEP 1

1 ア $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ イ $2\sqrt{5}-2$

解説 漸近線の方程式から中心は$(-2,\ 0)$で，双曲線が原点を通ることから，方程式は

$\frac{(x+2)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$

とおける。

漸近線の傾きが±2より

$\frac{b}{a}=2$

$b=2a$ ……①

原点を通ることより

$\frac{4}{a^2}=1$ ……②

①，②より

$a=2$，$b=4$

したがって，方程式は

$\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$

$\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ と $c>0$ より

$c=2\sqrt{5}-2$

2 ア $4\sqrt{2}$ イ $x^2+(y-5)^2=32$

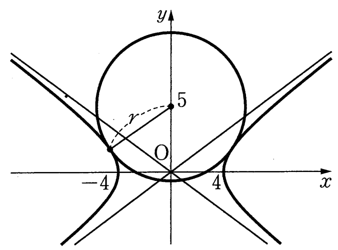
解説 求める円の方程式を $x^2+(y-5)^2=r^2$ $(r>0)$ とおく。

$x^2=r^2-(y-5)^2$ を双曲線の方程式に代入すると

$9\{r^2-(y-5)^2\}-16y^2=144$

$9(r^2-y^2+10y-25)-16y^2=144$

$25y^2-90y+9(41-r^2)=0$



円と双曲線はともにy軸に関して対称だから，この方程式が重解をもてばよく，判別式をDとして

$\frac{D}{4}=(-45)^2-25\cdot9(41-r^2)=0$

整理して

$225\{9-(41-r^2)\}=0$

$225(r^2-32)=0$

ゆえに，$r^2=32$

$r=4\sqrt{2}$

円の方程式は，$x^2+(y-5)^2=32$

3 $\frac{15}{2}$

解説 与えられた条件より，円$x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$と双曲線$25x^2-9y^2=225$の交点のうち，第1象限にあるものを，円の方程式から考えて

$\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$と表すことができる。

よって，この点が双曲線上にあるから

$25\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2-9\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=225$

$16\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=225$

$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{225}{16}$

$a=\frac{15\sqrt{2}}{4}$

したがって，正方形の1辺の長さは

$\sqrt{2}a=\frac{15}{2}$

4 ア $k<-\sqrt{7}$

イ $y=\frac{9}{8}x$ $\left(x>\frac{8\sqrt{7}}{7}\right)$

解説 2つの式からyを消去すると

$9x^2-4(2x+k)^2=36$

$7x^2+16kx+4k^2+36=0$

この方程式が異なる2つの正の解をもつことから，判別式をD，2つの解をα，βとすると

$\frac{D}{4}=(8k)^2-7(4k^2+36)>0$ ……①

$\alpha+\beta=-\frac{16}{7}k>0$ ……②

$\alpha\beta=\dfrac{4k^2+36}{7}>0$ はつねに成り立つ。

①より，$36(k^2-7)>0$

②と合わせて考え，$k<-\sqrt{7}$ ……③

$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-\dfrac{8}{7}k$ より

$k=-\dfrac{7}{8}x$ ……④

これを $y=2x+k$ に代入すると $y=\dfrac{9}{8}x$ である。

また，③と④より，$x>\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$ である。

したがって，点Pの軌跡の方程式は

$y=\dfrac{9}{8}x \quad \left(x>\dfrac{8\sqrt{7}}{7}\right)$

STEP 2

1 **2つの漸近線は**

$\boldsymbol{y=\dfrac{b}{a}x}$ ……①，$\boldsymbol{y=-\dfrac{b}{a}x}$ ……②

双曲線上の点 $\boldsymbol{P(x_0,\ y_0)}$ を通り，①に平行な直線は

$\boldsymbol{y=\dfrac{b}{a}(x-x_0)+y_0}$ ……③

②に平行な直線は

$\boldsymbol{y=-\dfrac{b}{a}(x-x_0)+y_0}$ ……④

①と④の交点Aの座標を求める。

$\boldsymbol{\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{b}{a}(x-x_0)+y_0}$ **より**

$\boldsymbol{x=\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)}$

①に代入し

$\boldsymbol{y=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)=\dfrac{b}{2}\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)}$

したがって，①，④の交点Aの座標は

$\boldsymbol{A\left(\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right),\ \dfrac{b}{2}\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)\right)}$

同様にして，②と③の交点Bの座標は

$\boldsymbol{B\left(\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right),\ -\dfrac{b}{2}\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right)\right)}$

したがって，平行四辺形の面積 $\boldsymbol{S}$ は

$\boldsymbol{S=2\times\triangle OAB}$

$\boldsymbol{=2\times\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)\cdot\left(-\dfrac{b}{2}\right)\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right)\right.}$

$\boldsymbol{\left.-\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right)\cdot\dfrac{b}{2}\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)\right|}$

$\boldsymbol{=\dfrac{1}{2}\left|ab\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}\right)\right|}$

ここで，点Pが双曲線上にあることより

$\boldsymbol{\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1}$

であるから

$\boldsymbol{S=\dfrac{1}{2}|ab|}$ **(一定)**

解説 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ のとき

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

が成り立つ。

2 (1) $\boldsymbol{PA=\dfrac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$，$\boldsymbol{PB=\dfrac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

(2) $\boldsymbol{PA\cdot PB=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$ (3) **4**

解説 (1) PAは点 $P(x,\ y)$ から直線 $bx-ay=0$ までの距離だから，$\dfrac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

PBは点 $P(x,\ y)$ から直線 $bx+ay=0$ までの距離だから，$\dfrac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2) $PA\cdot PB=\dfrac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\dfrac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$=\dfrac{|b^2x^2-a^2y^2|}{a^2+b^2}$

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ より，$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

が成り立つから

$PA\cdot PB=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

(3) $a+b=\dfrac{ab}{\sqrt{2}}$

$ab=\sqrt{2}(a+b)$

$a^2b^2=2(a+b)^2$ だから

$\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{2(a+b)^2}{a^2+b^2}$

$=2+\dfrac{4ab}{a^2+b^2}=2+\dfrac{4}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}$

$a>0$，$b>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=2$

したがって

$\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}\leqq 2+\dfrac{4}{2}=4$

が成り立つ。

等号は，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$ かつ $a+b=\dfrac{ab}{\sqrt{2}}$ および $a>0$，$b>0$ より，$a=b=2\sqrt{2}$ のときに成り立つ。

したがって，$\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ の最大値は 4

第7講 2次曲線(4) ―接線―

P.33～P.34 **類題**

1 (1) $\boldsymbol{y=-x+2}$

(2) $\boldsymbol{y=3}$

(3) $\boldsymbol{y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

解説 (1) $4y=-4(x-2)$

すなわち，$y=-x+2$

(2) $\dfrac{0}{25}\cdot x+\dfrac{3}{9}y=1$

すなわち，$y=3$

(3) $2x-\sqrt{3}y=1$

すなわち，$y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2 (1) $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{4}x+3}$

(2) $\boldsymbol{y=-\dfrac{3}{2}x+4}$

解説 (1) 放物線 $(y-2)^2=2(x-4)$ ……① を x 軸方向に -4，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると

放物線 $y^2=2x$ ……②

となる。

また，この平行移動により，①上の点 $(12,\ 6)$ は，②上の点 $(8,\ 4)$ に移る。

点 $(8,\ 4)$ における②の接線は

$4y=x+8$

であるから，求める接線は，これを x 軸方向に 4，y 軸方向に 2 だけ平行移動して

$4(y-2)=(x-4)+8$

$y=\dfrac{1}{4}x+3$

(2) 双曲線 $(x+1)^2-\dfrac{(y-5)^2}{2}=1$ ……① を x 軸方向に 1，y 軸方向に -5 だけ平行移動すると

双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ ……②

となる。

また，この平行移動により，①上の点 $(2,\ 1)$ は，②上の点 $(3,\ -4)$ に移る。

点 $(3,\ -4)$ における②の接線は

$3x+2y=1$

であるから，求める接線は，これを x 軸方向に -1，y 軸方向に 5 だけ平行移動して

$3(x+1)+2(y-5)=1$

$y=-\dfrac{3}{2}x+4$

3 (1) $\boldsymbol{y=2x\pm\sqrt{10}}$

(2) $\boldsymbol{y=x+1}$，$\boldsymbol{y=-3x+5}$

解説 (1) 求める接線を $y=2x+n$ とおいて，これを双曲線の方程式に代入すると

$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{(2x+n)^2}{2}=1$

$2x^2-3(2x+n)^2=6$

$10x^2+12nx+3n^2+6=0$

これが重解をもつことから，判別式を D として

$\dfrac{D}{4}=(6n)^2-10(3n^2+6)$

$=6n^2-60=0$

$n=\pm\sqrt{10}$

したがって，求める接線は

$y=2x\pm\sqrt{10}$

(2) 接点を $P(x_1,\ y_1)$ とおくと，Pは双曲線上にあるから

$\dfrac{x_1^2}{3}-\dfrac{y_1^2}{2}=1$ ……①

また，Pにおける双曲線の接線は

$\dfrac{x_1x}{3}-\dfrac{y_1y}{2}=1$ ……㊟

であり，これが点 $(1,\ 2)$ を通るから

$\dfrac{x_1}{3}-y_1=1$

$y_1=\dfrac{x_1}{3}-1$ ……②

②を①に代入して

$\dfrac{x_1^2}{3}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_1}{3}-1\right)^2=1$

$5x_1^2+6x_1-27=0$

$(x_1+3)(5x_1-9)=0$

$x_1=-3,\ \dfrac{9}{5}$

よって，②より

$x_1=-3$ のとき，$y_1=-2$

$x_1=\dfrac{9}{5}$ のとき，$y_1=-\dfrac{2}{5}$

したがって，㊟より，求める接線は

$y=x+1$，$y=-3x+5$

P.35 **演習問題**

1 (1) $\boldsymbol{y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2}}$

(2) $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2}}$

解説 (1) 楕円の方程式を変形すると

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{2y^2}{3}=1$

となるから，求める接線の方程式は

$$\frac{x}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}y=1$$

$$y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2}$$

(2) 放物線の方程式を変形すると

$(y-1)^2=3(x+4)$ ……①

これを x 軸方向に 4，y 軸方向に -1 だけ平行移動すると

$y^2=3x$ ……②

となり，この平行移動により，①上の点$(-1,\ 4)$は，②上の点$(3,\ 3)$に移る。

点$(3,\ 3)$における②の接線は

$$3y=\frac{3}{2}(x+3)$$

であるから，これを x 軸方向に -4，y 軸方向に 1 だけ平行移動して，求める接線は

$$3(y-1)=\frac{3}{2}(x+4+3)$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$$

2 (1) $y=\sqrt{6}x\pm\sqrt{3}$

(2) $y=\pm\sqrt{7}x+2$

解説 (1) 接線の方程式を $y=\sqrt{6}x+n$ とおいて，双曲線の方程式に代入すると

$$x^2-\frac{1}{3}(\sqrt{6}x+n)^2=1$$

$$3x^2+2\sqrt{6}nx+n^2+3=0$$

これが重解をもつことから，判別式を D として

$$\frac{D}{4}=(\sqrt{6}n)^2-3(n^2+3)$$

$$=3n^2-9=0$$

$$n=\pm\sqrt{3}$$

よって，求める接線は，$y=\sqrt{6}x\pm\sqrt{3}$

(2) 接点の座標を $(x_0,\ y_0)$ とおくと

$x_0^2-\frac{y_0^2}{3}=1$ ……①

また，接線の方程式は

$x_0x-\frac{y_0y}{3}=1$ ……⊛

となり，これが点$(0,\ 2)$を通ることから

$-\frac{2}{3}y_0=1$　　$y_0=-\frac{3}{2}$

これと①より，$x_0=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

よって，⊛より，求める接線は

$y=\pm\sqrt{7}x+2$

(別解)

点$(0,\ 2)$を通る，x 軸に垂直な直線 $x=0$ は，与えられた双曲線の接線とはならない。

そこで，接線を $y=mx+2$ とおいて，双曲線の方程式に代入すると

$$x^2-\frac{1}{3}(mx+2)^2=1$$

$$3x^2-(mx+2)^2=3$$

$$(3-m^2)x^2-4mx-7=0$$

これが重解をもつことから，判別式を D として

$$\begin{cases}3-m^2\neq0\\ \frac{D}{4}=(-2m)^2+7(3-m^2)=0\end{cases}$$

よって，$m=\pm\sqrt{7}$ となるから，求める接線は，$y=\pm\sqrt{7}x+2$

3 (1) $y=\frac{5}{6}x-\frac{3}{2}$

(2) 漸近線の方程式は

$y=\frac{2}{3}x$ ……①，$y=-\frac{2}{3}x$ ……②

であるから

接線と①の交点は，$(9,\ 6)$

接線と②の交点は，$\left(1,\ -\frac{2}{3}\right)$

となり，これら 2 点を結ぶ線分の中点は

$$\left(\frac{9+1}{2},\ \frac{6-\frac{2}{3}}{2}\right)$$

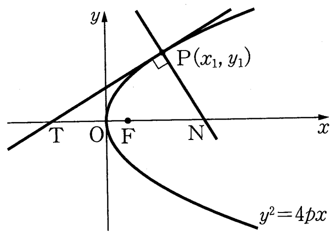
すなわち，$\left(5,\ \frac{8}{3}\right)$となり，A に一致する。

したがって，この線分は，点 A で 2 等分される。

解説 (1) $\frac{5}{9}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}y=1$ より，

$$y=\frac{5}{6}x-\frac{3}{2}$$

4



$y^2=4px$ 上の 1 点を $P(x_1,\ y_1)$ $(y_1\neq0)$ とすると，この点における接線の方程式は

$y_1y=2p(x+x_1)$ ……①

法線の方程式は

$y-y_1=-\frac{y_1}{2p}(x-x_1)$ ……②

である。

①で $y=0$ とおくと，$x=-x_1$

したがって，点 T の座標は$(-x_1,\ 0)$である。

②で $y=0$ とおくと，$y_1\neq0$ だから

$x=x_1+2p$

したがって，点 N の座標は$(x_1+2p,\ 0)$である。

$$\frac{-x_1+(x_1+2p)}{2}=p$$

が成り立つから，焦点 $F(p,\ 0)$は TN の中点である。

5 (1) $(x_1^2-4)m^2-2x_1y_1m+y_1^2-1=0$

(2) 原点を中心とする，半径 $\sqrt{5}$ の円

解説 (1) 点 $P(x_1,\ y_1)$を通り，傾きが m である直線の方程式は

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y=mx-mx_1+y_1$$

となるから，これを楕円の方程式に代入すると

$$x^2+4(mx-mx_1+y_1)^2=4$$

$$(4m^2+1)x^2-8m(mx_1-y_1)x+4(mx_1-y_1)^2-4=0$$

これが重解をもつことから，判別式を D として

$$\frac{D}{4}=16m^2(mx_1-y_1)^2-(4m^2+1)\{4(mx_1-y_1)^2-4\}=0$$

よって

$(x_1^2-4)m^2-2x_1y_1m+y_1^2-1=0$ ……①

(2) (i) $x_1=\pm2$ のとき

$P(x_1,\ y_1)$から楕円に引いた 2 本の接線が直交するための条件は

$y_1=\pm1$

よって，4 点

$(2,\ 1)$，$(2,\ -1)$，$(-2,\ 1)$，$(-2,\ -1)$

は求める軌跡に含まれる。

(ii) $x_1\neq\pm2$ のとき

$P(x_1,\ y_1)$から楕円に引いた 2 接線の傾きは，m の 2 次方程式①の 2 実数解となるから，2 直線が直交するための条件は，(傾きの積)$=-1$ より

$$\frac{y_1^2-1}{x_1^2-4}=-1$$

$$y_1^2-1=-(x_1^2-4)$$

$x_1^2+y_1^2=5$　$(x_1\neq\pm2)$

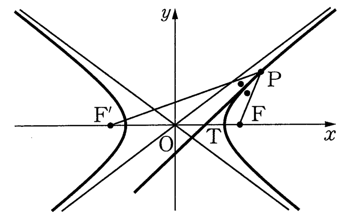
以上より，求める軌跡は

$x^2+y^2=5$

すなわち，原点を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円となる。

6 (1) $PF=\frac{|cx_1-a^2|}{a}$

(2)



(1)と同様にして，$PF'=\frac{|cx_1+a^2|}{a}$

また，P における双曲線の接線は

$$\frac{x_1}{a^2}x-\frac{y_1}{b^2}y=1$$

となり，$y=0$ とすると

$\frac{x_1}{a^2}x=1$　　$x=\frac{a^2}{x_1}$　($x_1\neq0$ より)

よって，接線と x 軸との交点を T とすると

$$T\left(\frac{a^2}{x_1},\ 0\right)$$

したがって

$$FT:F'T=\left|c-\frac{a^2}{x_1}\right|:\left|-c-\frac{a^2}{x_1}\right|$$

$$=\left|\frac{cx_1-a^2}{x_1}\right|:\left|\frac{cx_1+a^2}{x_1}\right|$$

$$=|cx_1-a^2|:|cx_1+a^2|$$

$$=PF:PF'$$

となるから，P における双曲線の接線は，2 つの線分 PF, PF′ のなす角を 2 等分する。

解説 (1) $c=\sqrt{a^2+b^2}$ より，$b^2=c^2-a^2$ ……①

また，$P(x_1,\ y_1)$は双曲線上にあるから

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

$y_1^2=b^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}-1\right)$ ……②

よって，①，②より

$$PF^2=(x_1-c)^2+y_1^2$$

$$=(x_1-c)^2+b^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}-1\right)$$

$$=(x_1-c)^2+(c^2-a^2)\left(\frac{x_1^2}{a^2}-1\right)$$

$$=\frac{c^2x_1^2}{a^2}-2cx_1+a^2$$

$$=\frac{(cx_1-a^2)^2}{a^2}$$

したがって，$PF=\frac{|cx_1-a^2|}{a}$

7 (1) 放物線　$y^2=8x$

(2) 楕円　$\frac{9}{64}\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+\frac{3}{16}y^2=1$

(3) 双曲線　$\frac{9}{64}\left(x+\frac{10}{3}\right)^2-\frac{3}{64}y^2=1$

解説 P$(x,\ y)$とすると

$PF=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

また，Pと直線ℓとの距離をdとすると

$d=|x-(-2)|=|x+2|$

(1) PF：$d=1：1$のとき，PF$=d$より

$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x+2|$

両辺を2乗して

$(x-2)^2+y^2=(x+2)^2$

$y^2=8x$

よって，P$(x,\ y)$の軌跡は

放物線 $y^2=8x$

(2) PF：$d=1：2$のとき，2PF$=d$より

$2\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x+2|$

両辺を2乗して

$4\{(x-2)^2+y^2\}=(x+2)^2$

$3x^2-20x+4y^2+12=0$

$3\left(x-\dfrac{10}{3}\right)^2+4y^2=\dfrac{64}{3}$

$\dfrac{9}{64}\left(x-\dfrac{10}{3}\right)^2+\dfrac{3}{16}y^2=1$

よって，P$(x,\ y)$の軌跡は

楕円 $\dfrac{9}{64}\left(x-\dfrac{10}{3}\right)^2+\dfrac{3}{16}y^2=1$

(3) PF：$d=2：1$のとき，PF$=2d$より

$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2|x+2|$

両辺を2乗して

$(x-2)^2+y^2=4(x+2)^2$

$3x^2+20x-y^2+12=0$

$3\left(x+\dfrac{10}{3}\right)^2-y^2=\dfrac{64}{3}$

$\dfrac{9}{64}\left(x+\dfrac{10}{3}\right)^2-\dfrac{3}{64}y^2=1$

よって，P$(x,\ y)$の軌跡は

双曲線 $\dfrac{9}{64}\left(x+\dfrac{10}{3}\right)^2-\dfrac{3}{64}y^2=1$

P.36 入試問題演習

STEP 1

1 **焦点$(0,\ p)$を通る直線を $y=mx+p$ とおき，点P，Qの座標をそれぞれP$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$とする。**

$x^2=4py$ と $y=mx+p$ を連立すると

$x^2=4p(mx+p)$

$x^2-4pmx-4p^2=0$

$x_1,\ x_2$ はこの方程式の解だから，解と係数の関係より

$x_1x_2=-4p^2$ ……⊛

点P，Qにおける接線は

$x_1x=2p(y+y_1)$ ……①

$x_2x=2p(y+y_2)$ ……②

$p\neq0$ だから，⊛より，①，②の傾きの積は

$\dfrac{x_1}{2p}\cdot\dfrac{x_2}{2p}=\dfrac{x_1x_2}{4p^2}=\dfrac{-4p^2}{4p^2}=-1$

したがって，①と②は直交する。

2 **焦点F$(p,\ 0)$を通る直線を $x=my+p$ として，$y^2=4px$ と連立すると**

$y^2=4p(my+p)$

$y^2-4pmy-4p^2=0$

A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$とすると，y_1，y_2 はこの方程式の解だから，解と係数の関係より

$y_1y_2=-4p^2$ ……⊛

また，点A，Bにおける接線は

$y_1y=2p(x+x_1)$ ……①

$y_2y=2p(x+x_2)$ ……②

①$\times y_2-$②$\times y_1$ より

$2p(y_2-y_1)x+2px_1y_2-2px_2y_1=0$

$y_1^2=4px_1$，$y_2^2=4px_2$ より

$2p(y_2-y_1)x+\dfrac{1}{2}y_1^2y_2-\dfrac{1}{2}y_1y_2^2=0$

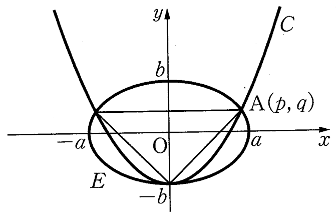
$4p(y_2-y_1)x=y_1y_2(y_2-y_1)$

$y_1\neq y_2$ と⊛より， $x=\dfrac{y_1y_2}{4p}=\dfrac{-4p^2}{4p}=-p$

したがって，交点Cは準線 $x=-p$ 上にある。

3 ア 1　イ 2　ウ 2

解説



放物線$C：y=x^2+m$ と楕円$E：\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ の共有点が3個だから，$m=-b$，$C：y=x^2-b$ である。

3個の共有点を頂点とする三角形の面積が1だから

$\dfrac{1}{2}\cdot2p(q+b)=1$

$p(q+b)=1$ ……①

点AはC上にあるから，$q=p^2-b$ ……②

①，②より，$p^3=1$

pは実数なので，$p=1$

よって，$q=1-b$

$E：b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上に点A$(p,\ q)$があるから

$b^2p^2+a^2q^2=a^2b^2$

$p=1$，$q=1-b$ を代入すると

$b^2+a^2(1-b)^2=a^2b^2$

$a^2+b^2-2a^2b=0$ ……③

Eの焦点$(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$がC上にあるから

$0=a^2-b^2-b$

$a^2=b^2+b$ ……④

④を③に代入して

$b^2+b+b^2-2b(b^2+b)=0$

$b(2b^2-1)=0$

$b>0$ の条件から，$b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$m=-b=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4 $\dfrac{10-3\sqrt{5}}{5}$

解説 直線 $2x-y-3=0$ に平行な直線を $y=2x+k$ とおき，双曲線と接する場合を考える。これを双曲線の方程式に代入すると

$16x^2-9(2x+k)^2=144$

整理して

$20x^2+36kx+9k^2+144=0$ ……①

接することから，判別式をDとして

$\dfrac{D}{4}=(18k)^2-20(9k^2+144)=0$

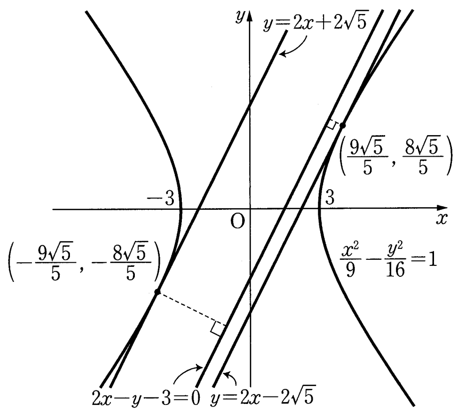
$k=\pm2\sqrt{5}$

このとき，①より，$x=\mp\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$

$y=2x\pm2\sqrt{5}$ より，$y=\mp\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

したがって，接点の座標は

$\left(\pm\dfrac{9\sqrt{5}}{5},\ \pm\dfrac{8\sqrt{5}}{5}\right)$ （複号同順）



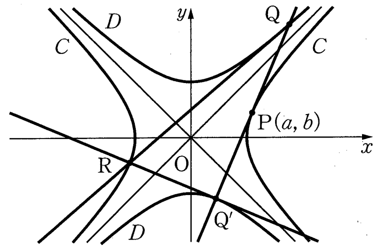
グラフから考えると，点$\left(\dfrac{9\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{8\sqrt{5}}{5}\right)$から直線 $2x-y-3=0$ に下ろした垂線の長さが最小値となるから，最小値は

$$\frac{\left|2\cdot\dfrac{9\sqrt{5}}{5}-\dfrac{8\sqrt{5}}{5}-3\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10-3\sqrt{5}}{5}$$

STEP 2

1 **双曲線 $x^2-y^2=1$ の $x<0$ の部分**

解説



Cの点P$(a,\ b)$における接線は

$ax-by=1$ ……①

である。

点Q，Q′の座標をそれぞれ$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$とすると，これが接線①上にあるから

$ax_1-by_1=1$ ……②

$ax_2-by_2=1$ ……③

が成り立つ。

Dの点Qにおける接線と点Q′における接線は，それぞれ

$x_1x-y_1y=-1$

$x_2x-y_2y=-1$

すなわち

$-x_1x+y_1y=1$ ……④

$-x_2x+y_2y=1$ ……⑤

ここで，

②は，点$(-a,\ -b)$が接線④上にあることを，

③は，点$(-a,\ -b)$が接線⑤上にあることを，

それぞれ示しているから，点$(-a,\ -b)$は④，⑤の交点となる。

すなわち，R$(-a,\ -b)$であり，点Rは点Pと，原点に関して対称な位置にある。

点P$(a,\ b)$はCの$x>0$の部分を動くから，点Rは $x^2-y^2=1$ の $x<0$ の部分を動く。

第8講 媒介変数表示

P.38〜P.39 **類題**

1 (1) **直線** $2x+3y=7$

(2) **放物線** $y=\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$

解説 (1) $\begin{cases} x=5-3t & \cdots\cdots① \\ y=-1+2t & \cdots\cdots② \end{cases}$

①×2+②×3より

$2x+3y=7$

よって，直線 $2x+3y=7$

(2) $\begin{cases} x=2t-1 & \cdots\cdots① \\ y=6t^2+1 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より

$t=\frac{x+1}{2}$

②に代入すると

$y=6\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1$

$y=\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$

よって，放物線 $y=\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$

2 (1) **点$(-1,\ 2)$を中心とする半径4の円**

(2) **楕円** $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{9}=1$

(3) **双曲線** $x^2-\frac{y^2}{4}=1$

解説 (1) $\begin{cases} x=-1+4\cos\theta & \cdots\cdots① \\ y=2+4\sin\theta & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より

$\cos\theta=\frac{1}{4}(x+1)$

②より

$\sin\theta=\frac{1}{4}(y-2)$

これらを，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入して

$\frac{1}{16}(x+1)^2+\frac{1}{16}(y-2)^2=1$

$(x+1)^2+(y-2)^2=16$

よって，点$(-1,\ 2)$を中心とする半径4の円

(2) $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta & \cdots\cdots① \\ y=3\sin\theta & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より

$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{2}}$

②より

$\sin\theta=\frac{y}{3}$

これらを，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入して

$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{9}=1$

よって，楕円 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{9}=1$

(3) $\begin{cases} x=\frac{1}{\cos\theta} & \cdots\cdots① \\ y=2\tan\theta & \cdots\cdots② \end{cases}$

②より

$\tan\theta=\frac{y}{2}$

これと①を，$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ に代入して

$1+\frac{y^2}{4}=x^2$

よって，双曲線 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$

3 (1) **最大値** $2\sqrt{2}$
最小値 $-2\sqrt{2}$

(2) **最大値** $2\sqrt{6}+4\sqrt{3}$
最小値 $-2\sqrt{6}+4\sqrt{3}$

解説 点P$(x,\ y)$が楕円 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 上を動くことから

$\begin{cases} x=\sqrt{6}\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ $(0\leqq\theta<2\pi)$

とおくことができる。

(1) $x-y=\sqrt{6}\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$

$\frac{2}{3}\pi\leqq\theta+\frac{2}{3}\pi<\frac{8}{3}\pi$ より

$\theta+\frac{2}{3}\pi=\frac{5}{2}\pi$ つまり，$\theta=\frac{11}{6}\pi$ のとき

最大値 $2\sqrt{2}$

$\theta+\frac{2}{3}\pi=\frac{3}{2}\pi$ つまり，$\theta=\frac{5}{6}\pi$ のとき

最小値 $-2\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{3}x^2+2xy+\sqrt{3}y^2$

$=6\sqrt{3}\cos^2\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+2\sqrt{3}\sin^2\theta$

$=6\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}+2\sqrt{3}\sin2\theta$

$+2\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}$

$=2\sqrt{3}\sin2\theta+2\sqrt{3}\cos2\theta+4\sqrt{3}$

$=2\sqrt{6}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+4\sqrt{3}$

$\frac{\pi}{4}\leqq2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{17}{4}\pi$ より

$2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi$ つまり，$\theta=\frac{\pi}{8},\ \frac{9}{8}\pi$

のとき

最大値 $2\sqrt{6}+4\sqrt{3}$

$2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$ つまり，$\theta=\frac{5}{8}\pi,$

$\frac{13}{8}\pi$ のとき

最小値 $-2\sqrt{6}+4\sqrt{3}$

P.40 **演習問題**

1 (1) $y=2x+3$ (2) $y=3x^2-5x+2$

解説 (1) $y=x^2-2tx+t^2+2t+3$

$=(x-t)^2+2t+3$

頂点の座標を$(x,\ y)$とすると

$x=t,\ y=2t+3$

2式より t を消去して，$y=2x+3$

(2) $y=x^2-2(t+1)x+4t^2+3t+1$

$=\{x-(t+1)\}^2-(t+1)^2+4t^2+3t+1$

$=\{x-(t+1)\}^2+3t^2+t$

頂点の座標を$(x,\ y)$とすると

$x=t+1,\ y=3t^2+t$

2式より t を消去すると

$y=3(x-1)^2+x-1$

$=3x^2-5x+2$

2 $y=t(x+1)$ **を** $x^2+y^2=1$ **に代入すると**

$x^2+t^2(x+1)^2=1$

$x^2-1+t^2(x+1)^2=0$

$(x+1)\{x-1+t^2(x+1)\}=0$

$(x+1)\{(t^2+1)x+t^2-1\}=0$

ゆえに， $x=-1,\ \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$x=-1$ **のとき，** $y=0$

$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ **のとき，** $y=\frac{2t}{1+t^2}$

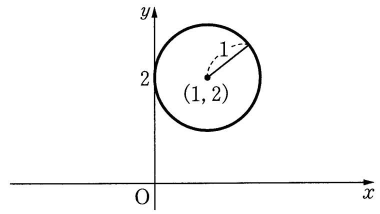
t **の変化につれて，交点Pは円** $x^2+y^2=1$ **の点A$(-1,\ 0)$以外の部分を一周する。**

よって

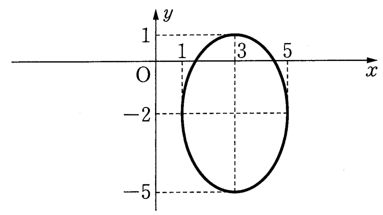
$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ y=\frac{2t}{1+t^2}$

は，円 $x^2+y^2=1$ **の媒介変数表示であり，点Aを除く。**

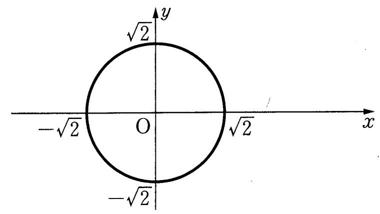
3 (1)



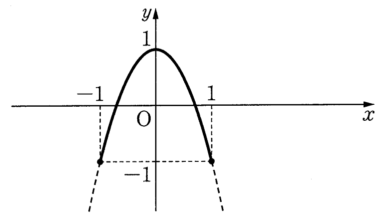
(2)



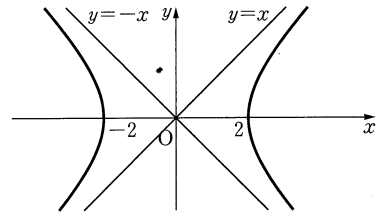
(3)



(4)



(5)



解説 (1) $x=1+\cos\theta,\ y=2+\sin\theta$ より

$\cos\theta=x-1,\ \sin\theta=y-2$

これらを，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入して

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

(2) $x=2\cos\theta+3,\ y=3\sin\theta-2$ より

$\cos\theta=\frac{x-3}{2},\ \sin\theta=\frac{y+2}{3}$

これらを，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入して

$\frac{(x-3)^2}{2^2}+\frac{(y+2)^2}{3^2}=1$

(3) $x=\sin\theta+\cos\theta,\ y=\sin\theta-\cos\theta$ より

$\sin\theta=\frac{x+y}{2},\ \cos\theta=\frac{x-y}{2}$

これらを，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して

$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=1$

$x^2+y^2=2$

(4) $x=\sin\theta,\ y=\cos2\theta$ より

$y=\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2x^2$

ただし，$-1\leqq x\leqq1$

(5) $x=\frac{2}{\cos\theta},\ y=2\tan\theta$ より

$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{x}{2}$，$\tan\theta=\frac{y}{2}$

これらを，$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ に代入して

$1+\frac{y^2}{4}=\frac{x^2}{4}$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$

4 **最大値** $\frac{\sqrt{13}+7}{2}$

最小値 $\frac{-\sqrt{13}+7}{2}$

解説 実数x，yが$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$を満たすので

$x=\sqrt{3}\cos\theta$，$y=2\sin\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

とおくことができる。

このとき

x^2-xy+y^2

$=3\cos^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+4\sin^2\theta$

$=3\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}-\sqrt{3}\sin2\theta+4\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}$

$=-\sqrt{3}\sin2\theta-\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{7}{2}$

$=\frac{\sqrt{13}}{2}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{7}{2}$

（ただし，αは

$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{13}}$

を満たす角である。）

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$\alpha\leqq2\theta+\alpha<4\pi+\alpha$ であるから，x^2-xy+y^2 は

最大値　$\frac{\sqrt{13}+7}{2}$

最小値　$\frac{-\sqrt{13}+7}{2}$

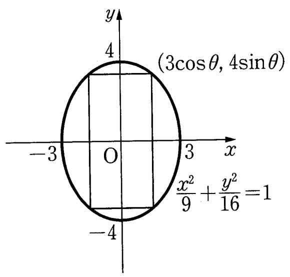
をとる。

5 **24**

解説 長方形の頂点のうち，第1象限にあるものを

$(3\cos\theta,\ 4\sin\theta)$　$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

とおくことができる。



このとき，長方形の面積をSとすると

$S=2\cdot3\cos\theta\times2\cdot4\sin\theta$

$=48\sin\theta\cos\theta$

$=24\sin2\theta$

$0<2\theta<\pi$ であるから，Sは $2\theta=\frac{\pi}{2}$

つまり，$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき

最大値　24

をとる。

6 (1) $\left(-\frac{m}{1+m^2},\ -\frac{m^2}{1+m^2}\right)$

(2) **点$\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$を中心とする半径$\frac{1}{2}$の円**

ただし，点$(0,\ -1)$を除く。

解説(1) $\begin{cases} y=mx & \cdots\cdots① \\ x+m(y+1)=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①を②に代入すると

$x+m(mx+1)=0$

$(1+m^2)x=-m$

$1+m^2\neq0$ より

$x=-\frac{m}{1+m^2}$　……③

これを①に代入して

$y=-\frac{m^2}{1+m^2}$　……④

したがって，交点の座標は

$\left(-\frac{m}{1+m^2},\ -\frac{m^2}{1+m^2}\right)$

(2) ④より

$(1+m^2)y=-m^2$

$(y+1)m^2=-y$

ここで，$y=-1$とすると，等式を成立させる実数mは存在しないから，$y\neq-1$で

$m^2=-\frac{y}{y+1}$　……⑤

⑤を③に代入して

$x=-\frac{m}{1-\frac{y}{y+1}}$

$x=-(y+1)m$

$m=-\frac{x}{y+1}$

これを⑤に代入して

$\frac{x^2}{(y+1)^2}=-\frac{y}{y+1}$

$x^2=-y(y+1)$

$x^2+y^2+y=0$

$x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

ただし，$y\neq-1$ より

$(x,\ y)\neq(0,\ -1)$

したがって，求める軌跡は

点$\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$を中心とする半径$\frac{1}{2}$の円

ただし，点$(0,\ -1)$を除く。

(別解)

①，②からmを消去する。

$x\neq0$のとき，①より

$m=\frac{y}{x}$

これを②に代入して

$x+\frac{y}{x}(y+1)=0$

$x^2+y^2+y=0$

$x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

ただし，$x\neq0$ より

$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$，$(0,\ -1)$

$x=0$のとき，①より

$y=0$

このとき，②より

$m=0$

よって，$m=0$のとき2直線の交点は$(0,\ 0)$となり，点$(0,\ 0)$は求める軌跡に含まれる。

以上より，求める軌跡は

点$\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$を中心とする半径$\frac{1}{2}$の円

ただし，点$(0,\ -1)$を除く。

7 (1) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(-\cos3\theta,\ -\sin3\theta)$

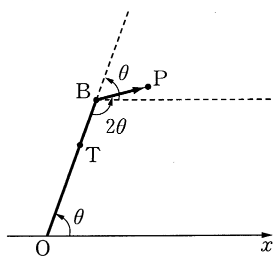
(2) $\begin{cases} x=3\cos\theta-\cos3\theta \\ y=3\sin\theta-\sin3\theta \end{cases}$

解説(1) 円Cと円Dの接点をTとし，線分BTから線分BPへはかった角をφとおくと，

$\overset{\frown}{\mathrm{AT}}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ より

$2\cdot\theta=1\cdot\varphi$

$\varphi=2\theta$



よって，上の図と BP=1 より

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(\cos(\theta+\pi+2\theta),\ \sin(\theta+\pi+2\theta))$

$=(\cos(\pi+3\theta),\ \sin(\pi+3\theta))$

$=(-\cos3\theta,\ -\sin3\theta)$

(2) OB=3 より

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3(\cos\theta,\ \sin\theta)$

$=(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)$

よって

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}$

$=(3\cos\theta-\cos3\theta,\ 3\sin\theta-\sin3\theta)$

したがって，点Pの軌跡の方程式は

$\begin{cases} x=3\cos\theta-\cos3\theta \\ y=3\sin\theta-\sin3\theta \end{cases}$

P.41 入試問題演習

STEP 1

1 (1) ① **円** $x^2+y^2=1$

② **楕円** $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) **最小値** $\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\left(-\frac{4}{3},\ \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

解説(1) ①は，$x=-\sin\theta$，$y=\cos\theta$ より

$\sin\theta=-x$，$\cos\theta=y$

これらを，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して

$x^2+y^2=1$

②は，$x=2\cos\theta$，$y=\sin\theta$ より

$\cos\theta=\frac{x}{2}$，$\sin\theta=y$

これらを，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入して

$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) 点A$(-1,\ 0)$から曲線②までの距離をdとすると

$d^2=(2\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta$

$=4\cos^2\theta+4\cos\theta+1+\sin^2\theta$

$=3\cos^2\theta+4\cos\theta+2$

$=3\left(\cos\theta+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ だから，$\cos\theta=-\frac{2}{3}$，

$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，最小値$\frac{\sqrt{6}}{3}$をとる。

最小値を与える点は，$\left(-\frac{4}{3},\ \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

2 (1) $\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{t},\ \frac{1}{t^2}\right)$　(2) **放物線** $y=3x^2+\frac{2}{3}$

解説(1) 点Pの座標は$(t,\ t^2)$だから，直線OPの方程式は，$y=tx$

題意より$t\neq0$であり，直線OQの方程式は，

$y=-\frac{1}{t}x$ である。

$y=x^2$ と連立して，$x(\neq0)$，yを求めると，

点Qの座標は$\left(-\frac{1}{t},\ \frac{1}{t^2}\right)$である。

(2) △POQの重心の座標を$(x,\ y)$とすると

$$x=\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{t}\right),\quad y=\frac{1}{3}\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)$$

であり

$$y=\frac{1}{3}\left\{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2\right\}=\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+\frac{2}{3}$$

$$=3x^2+\frac{2}{3}$$

xはあらゆる値をとるから，求める軌跡は

放物線　$y=3x^2+\frac{2}{3}$

3　$(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2$

解説　$x+y$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1+\sin 2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3$

同じようにして

$x-y=(\sin\theta-\cos\theta)^3$

したがって

$(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=2$

4　(1)　$\frac{(x-2a)^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1$

(2)　$y=0,\ y=\frac{4b}{3a}x$

解説(1)　$x=a(2+\sin\theta)$ より，$\frac{x-2a}{a}=\sin\theta$

$y=2b\cos^2\frac{\theta}{2}$ より

$$\frac{y}{b}=2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta$$

$$\frac{y-b}{b}=\cos\theta$$

したがって

$$\frac{(x-2a)^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1\quad\cdots\cdots①$$

(2)　①より，原点を通りx軸に垂直な直線$x=0$は，楕円Cの接線とはならない。

よって，原点を通る接線を$y=mx$とおき，これを①に代入すると

$$\frac{(x-2a)^2}{a^2}+\frac{(mx-b)^2}{b^2}=1$$

整理すると

$$(a^2m^2+b^2)x^2-2ab(am+2b)x+4a^2b^2=0$$

判別式をDとすると，$D=0$より

$$\frac{D}{4}=a^2b^2(am+2b)^2-4a^2b^2(a^2m^2+b^2)=0$$

$$4abm-3a^2m^2=0$$

$$am(4b-3am)=0$$

ゆえに，$m=0,\ \frac{4b}{3a}$

求める接線の方程式は，$y=0,\ y=\frac{4b}{3a}x$

5　最小値　3，$\mathrm{P}\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

解説　点Pの座標を$(2\cos\theta,\ \sin\theta)\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$とおくと，この点における接線の方程式は

$$\frac{x\cos\theta}{2}+y\sin\theta=1$$

したがって，点Q，Rの座標はそれぞれ$\left(\frac{2}{\cos\theta},\ 0\right)$，$\left(0,\ \frac{1}{\sin\theta}\right)$であるから

$$\mathrm{QR}^2=\left(\frac{2}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2$$

$$=4(1+\tan^2\theta)+1+\frac{1}{\tan^2\theta}$$

$$=4\tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}+5$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より，$4\tan^2\theta>0$，$\frac{1}{\tan^2\theta}>0$

であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$4\tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}\geqq 2\sqrt{4\tan^2\theta\cdot\frac{1}{\tan^2\theta}}=4$$

だから，$\mathrm{QR}^2\geqq 9$

QRの最小値は，3

等号が成り立つのは，$4\tan^2\theta=\frac{1}{\tan^2\theta}$，

$\tan\theta>0$ より

$$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

のときであり，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ だから

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3},\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって

QRの最小値は3，$\mathrm{P}\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

STEP 2

1　(1)　$\mathrm{P}\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2\tan^2\theta+b^2}},\ \frac{ab\tan\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta+b^2}}\right)$

$\mathrm{Q}\left(\frac{-ab\tan\theta}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2\theta}},\ \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2\theta}}\right)$

(2)　**点Oから線分PQに下ろした垂線をOHとすると**

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}$$

より

$$\mathrm{OH}=\frac{\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}}{\mathrm{PQ}}$$

一方，$\angle\mathrm{POQ}=\frac{\pi}{2}$ より，$\mathrm{PQ}=\sqrt{\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2}$

よって

$$\mathrm{OH}=\frac{\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}}{\sqrt{\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\mathrm{OP}^2}+\frac{1}{\mathrm{OQ}^2}}}$$

ここで

$$\mathrm{OP}^2=\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{abm}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)^2$$

$$=\frac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2+b^2}$$

$$\mathrm{OQ}^2=\left(\frac{-abm}{\sqrt{a^2+b^2m^2}}\right)^2+\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2m^2}}\right)^2$$

$$=\frac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2+b^2m^2}$$

となるから

$$\frac{1}{\mathrm{OP}^2}+\frac{1}{\mathrm{OQ}^2}=\frac{a^2m^2+b^2}{a^2b^2(1+m^2)}+\frac{a^2+b^2m^2}{a^2b^2(1+m^2)}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(1+m^2)}{a^2b^2(1+m^2)}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

したがって

$$\mathrm{OH}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad(\text{一定})$$

解説(1)　$m=\tan\theta$とおくと，直線OPは

$y=mx$

と表せるから，これを$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$に代入して

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2}{b^2}=1$$

$$(b^2+a^2m^2)x^2=a^2b^2$$

$$x^2=\frac{a^2b^2}{a^2m^2+b^2}$$

$x>0$として

$$x=\frac{ab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$$

このとき，$y=mx$より

$$y=\frac{abm}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$$

よって，Pの座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\ \frac{abm}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$$

一方，直線OQの傾きは$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{m}$

であるから，直線OQの方程式は

$$y=-\frac{1}{m}x$$

$$x=-my$$

よって，Pの座標の計算と同様にし，$y>0$に注意して

$$y=\frac{ab}{\sqrt{b^2m^2+a^2}}$$

$$x=\frac{-abm}{\sqrt{b^2m^2+a^2}}$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{-abm}{\sqrt{b^2m^2+a^2}},\ \frac{ab}{\sqrt{b^2m^2+a^2}}\right)$$

したがって，$m=\tan\theta$より

$$\mathrm{P}\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2\tan^2\theta+b^2}},\ \frac{ab\tan\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta+b^2}}\right)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{-ab\tan\theta}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2\theta}},\ \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2\theta}}\right)$$

第9講 極座標

P.43〜P.44 類題

1 (1) ① $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　② $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

③ $(0,\ -3)$

(2) ① $\left(4\sqrt{3},\ \frac{\pi}{6}\right)$　② $\left(5\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)$

③ $\left(\frac{2}{3},\ \pi\right)$

解説 (1) ① $x=1\cdot\cos\frac{7}{3}\pi=\frac{1}{2}$

$y=1\cdot\sin\frac{7}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

より，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

② $x=\frac{1}{2}\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

$y=\frac{1}{2}\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{4}$

より，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

③ $x=3\cos\left(-\frac{5}{2}\pi\right)=0$

$y=3\sin\left(-\frac{5}{2}\pi\right)=-3$

より，$(0,\ -3)$

(2) ① $r=\sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2}=4\sqrt{3}$

$\cos\theta=\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

より，$\theta=\frac{\pi}{6}$

よって，$\left(4\sqrt{3},\ \frac{\pi}{6}\right)$

② $r=\sqrt{(-5)^2+5^2}=5\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

より，$\theta=\frac{3}{4}\pi$

よって，$\left(5\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)$

③ $r=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+0^2}=\frac{2}{3}$

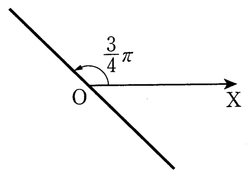
$\cos\theta=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=-1$

$\sin\theta=\frac{0}{\frac{2}{3}}=0$

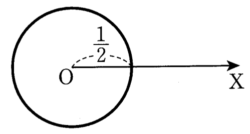
より，$\theta=\pi$

よって，$\left(\frac{2}{3},\ \pi\right)$

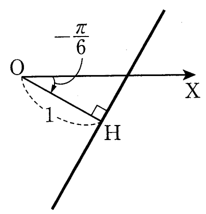
2 (1)



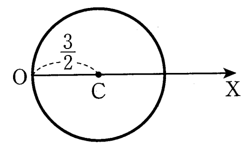
(2)



(3)



(4)



解説 (1) 極Oを通り始線と$\frac{3}{4}\pi$の角をなす直線を表す。

(2) 極Oを中心とする半径$\frac{1}{2}$の円を表す。

(3) 極座標が$\left(1,\ -\frac{\pi}{6}\right)$である点Hを通り，OHに垂直な直線を表す。

(4) 極座標が$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$である点Cを中心とする，半径$\frac{3}{2}$の円を表す。

3 (1) $r=-2\cos\theta$

(2) $3x+4y=2$

解説 (1) $x^2+y^2=r^2$，$x=r\cos\theta$を代入すると

$r^2+2r\cos\theta=0$

よって

$r=0,\ r=-2\cos\theta$

$\theta=\frac{\pi}{2}$とすれば

$r=-2\cos\theta=0$

となるから，$r=0$は$r=-2\cos\theta$に含まれる。

よって，$r=-2\cos\theta$

(2) 与式より

$3r\cos\theta+4r\sin\theta=2$

よって，求める方程式は

$3x+4y=2$

P.45 演習問題

1 (1) $(\sqrt{3},\ 1)$　(2) $(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$

(3) $(0,\ -\sqrt{3})$

解説 (1) $x=2\cos\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$y=2\sin\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{1}{2}=1$

(2) $x=4\cos\frac{3}{4}\pi=4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\sqrt{2}$

$y=4\sin\frac{3}{4}\pi=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

(3) $x=\sqrt{3}\cos\frac{3}{2}\pi=\sqrt{3}\cdot0=0$

$y=\sqrt{3}\sin\frac{3}{2}\pi=\sqrt{3}\cdot(-1)=-\sqrt{3}$

2 (1) $\left(3\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$　(2) $\left(2,\ \frac{5}{3}\pi\right)$

(3) $\left(8,\ \frac{7}{6}\pi\right)$

解説 (1) $r=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

より，$\theta=\frac{\pi}{4}$

(2) $r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$より，$\theta=\frac{5}{3}\pi$

(3) $r=\sqrt{(-4\sqrt{3})^2+(-4)^2}=8$

$\cos\theta=-\frac{4\sqrt{3}}{8}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$

より，$\theta=\frac{7}{6}\pi$

3 (1) $r^2\cos2\theta=4$　(2) $r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1$

(3) $x=3$　(4) $xy=3$

解説 (1) $x^2-y^2=4$

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$を代入すると

$r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=4$

ゆえに，$r^2\cos2\theta=4$

(2) $x+y=\sqrt{2}$

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$を代入すると

$r(\cos\theta+\sin\theta)=\sqrt{2}$

$\sqrt{2}r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1$

(注)

$r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$と表してもよい。

(3) $r\cos\theta=3$

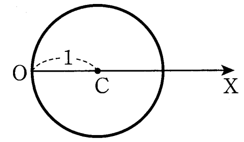
$r\cos\theta=x$だから，$x=3$

(4) $r^2\sin2\theta=6$より

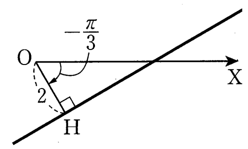
$2\cdot r\cos\theta\cdot r\sin\theta=6$

よって，$xy=3$

4 (1)



(2)



解説 (1) 極座標がC$(1,\ 0)$である点を中心とする，半径1の円である。

(別解)

$r=2\cos\theta$は$r=0$を含んでいるので，両辺にrをかけてよく

$r^2=2r\cos\theta$

$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$より

$x^2+y^2=2x$

$(x-1)^2+y^2=1$

直交座標が$(1,\ 0)$である点の極座標は$(1,\ 0)$であるから，求める図形は，極座標が$(1,\ 0)$である点を中心とする，半径1の円となる。

(2) $r\cos\theta-\sqrt{3}r\sin\theta=4$より

$2r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=4$

$r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=2$

よって，極座標が$\left(2,\ -\frac{\pi}{3}\right)$である点Hを通り，OHに垂直な直線を表す。

(別解)

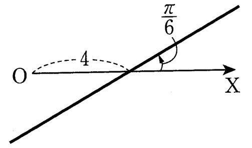
$r\cos\theta-\sqrt{3}r\sin\theta=4$より

$x-\sqrt{3}y=4$

これは，傾きが$\frac{1}{\sqrt{3}}$，x切片が4の直線を表す。すなわち

極座標が(4, 0)である点を通り，始線とのなす角が$\frac{\pi}{6}$である直線

を表す。

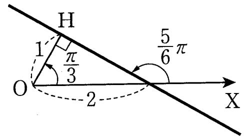


5 (1) $\boldsymbol{r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1}$

(2) $\boldsymbol{r^2-10r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=9-15\sqrt{2}}$

解説 (1) 極Oから直線に下ろした垂線をOHとすると，Hの極座標は$\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$となるから，求める極方程式は

$$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1$$



(別解)

与えられた直線を直交座標の方程式で表すと

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$$

$$x+\sqrt{3}y=2$$

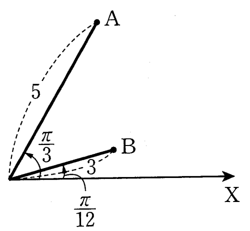
$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$を代入して

$$r\cos\theta+\sqrt{3}r\sin\theta=2$$

$$2r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=2$$

$$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1$$

(2)



円の半径をaとすると

$$a^2=AB^2$$

$$=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=25+9-30\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=34-15\sqrt{2}$$

したがって，求める極方程式は

$$r^2-2\cdot5\cdot r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+5^2=34-15\sqrt{2}$$

$$r^2-10r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=9-15\sqrt{2}$$

(別解)

$$AB^2=34-15\sqrt{2}$$

また，Aの直交座標は$\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$であるから，与えられた円を直交座標の方程式で表すと

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2=34-15\sqrt{2}$$

$$x^2+y^2-5x-5\sqrt{3}y=9-15\sqrt{2}$$

$x^2+y^2=r^2$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入して

$$r^2-5r(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)=9-15\sqrt{2}$$

$$r^2-10r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=9-15\sqrt{2}$$

6 (1) $\boldsymbol{r^2(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)=2}$

(2) $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

解説 (1) $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$より

$$r^2\cos^2\theta-\frac{1}{2}r^2\sin^2\theta=1$$

$$r^2(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)=2$$

(2) P，Qの極座標を，それぞれ

P(r_1, θ_1)

Q$\left(r_2, \theta_1+\frac{\pi}{2}\right)$

とおいても，一般性は失われない。

PはC上にあるから，(1)より

$$r_1^2(2\cos^2\theta_1-\sin^2\theta_1)=2$$

$$\frac{1}{r_1^2}=\frac{1}{2}(2\cos^2\theta_1-\sin^2\theta_1) \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ。

QもC上にあるから，同様にして

$$\frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{2}\left\{2\cos^2\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(2\sin^2\theta_1-\cos^2\theta_1) \quad \cdots\cdots②$$

したがって，①，②より

$$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}$$

$$=\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}$$

$$=\frac{1}{2}(2\cos^2\theta_1-\sin^2\theta_1)$$

$$+\frac{1}{2}(2\sin^2\theta_1-\cos^2\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}$$

7 $\boldsymbol{r=\frac{ae}{1-e\cos\theta}}$

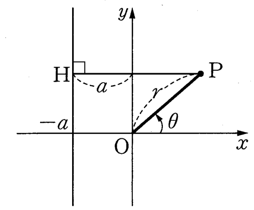
解説 点Pの極座標を(r, θ)とおくと，点Pの直交座標は$(r\cos\theta, r\sin\theta)$である。

OP$=r$，PH$=r\cos\theta+a$であるから，

$$\frac{OP}{PH}=\frac{r}{r\cos\theta+a}=e \text{ より}$$

$$r=re\cos\theta+ae$$

rについて解くと，$r=\frac{ae}{1-e\cos\theta}$



(注)

点Pの軌跡は，Oを焦点，直線$x=-a$を準線とする2次曲線となり，eはその離心率である。

$0<e<1$のとき，楕円

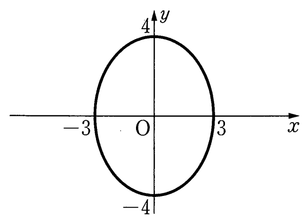
$e=1$のとき，放物線

$e>1$のとき，双曲線

P.46 **入試問題演習**

STEP 1

1 $\boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1}$



解説 $r^2(7\cos^2\theta+9)=144$

$$7r^2\cos^2\theta+9r^2=144$$

$$7x^2+9(x^2+y^2)=144$$

$$16x^2+9y^2=144$$

ゆえに，$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

2 (1) $\boldsymbol{x\cos\theta+y\sin\theta=r}$

(2) $\boldsymbol{r=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}$

解説 (1) 点P以外の直線上の点をQ(x, y)とすると，OP⊥PQであるから

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}$$

$$=(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot(x-r\cos\theta, y-r\sin\theta)$$

$$=0$$

$$r\cos\theta(x-r\cos\theta)+r\sin\theta(y-r\sin\theta)$$

$$=0$$

$$rx\cos\theta+ry\sin\theta=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$=r^2$$

$r>0$より，$x\cos\theta+y\sin\theta=r$ ……①

(2) (1)で得られた直線①が楕円に接すればよい。

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$において，$\frac{x}{a}=X$，$\frac{y}{b}=Y$とおくと，$X^2+Y^2=1$ ……②

また，①は

$$(a\cos\theta)X+(b\sin\theta)Y-r=0 \quad \cdots\cdots③$$

となる。

②と③が接することから

$$\frac{|-r|}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}=1$$

$r>0$より，$r=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$

3 (1) **楕円** $\boldsymbol{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1}$ (2) $\boldsymbol{r=\frac{9}{5-4\cos\theta}}$

(3) $\boldsymbol{r=\frac{15}{\sqrt{9\cos^2\theta+25\sin^2\theta}}}$

解説 (1) 5PF$=$4PH

$$25PF^2=16PH^2$$

$$25\{(x+4)^2+y^2\}=16\left(x+\frac{25}{4}\right)^2$$

整理して，$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ……①

(2) PF$=r$，PH$=\left|r\cos\theta+\frac{9}{4}\right|$だから

$$5r=4\left|r\cos\theta+\frac{9}{4}\right|$$

$$5r=\pm(4r\cos\theta+9)$$

$$r=\frac{\mp9}{5\pm4\cos\theta} \quad \text{(複号同順)}$$

ここで，$r=\frac{-9}{5+4\cos\theta}$において，

(r, θ)を$(-r, \theta+\pi)$におきかえると

$$-r=\frac{-9}{5+4\cos(\theta+\pi)}$$

$$r=\frac{9}{5-4\cos\theta}$$

したがって，求める極方程式は

$$r=\frac{9}{5-4\cos\theta}$$

(3) ①で$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$を代入すると

$$(9\cos^2\theta+25\sin^2\theta)r^2=225$$

$r>0$より，$r=\frac{15}{\sqrt{9\cos^2\theta+25\sin^2\theta}}$

STEP 2

1 (1) $x=\frac{a}{a^2+b^2}$, $y=-\frac{b}{a^2+b^2}$

(2) $r^2\cos 2\theta=1$

(3) $r^2=\cos 2\theta$

解説 (1) 点P$(a,\ b)$における接線は

$ax-by=1$ ……①

原点Oを通り①に垂直な直線は

$bx+ay=0$ ……②

点Qのx座標，y座標は連立方程式①，②を解き，$x=\frac{a}{a^2+b^2}$，$y=-\frac{b}{a^2+b^2}$

(2) $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$x^2-y^2=1$ より

$r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=1$

$r^2\cos 2\theta=1$

(3) P$(a,\ b)$の極座標を$(r_0,\ \theta_0)$とすると，(2)より

$a=r_0\cos\theta_0$，$b=r_0\sin\theta_0$

$r_0^2\cos 2\theta_0=1$ ……③

Q$(x,\ y)$の極座標を$(r,\ \theta)$とすると

$x=\frac{a}{a^2+b^2}$，$y=-\frac{b}{a^2+b^2}$

より

$r\cos\theta=\frac{r_0\cos\theta_0}{r_0^2}=\frac{\cos\theta_0}{r_0}$

$r\sin\theta=-\frac{r_0\sin\theta_0}{r_0^2}=-\frac{\sin\theta_0}{r_0}$

$r^2=x^2+y^2=\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{1}{r_0^2}$

これらより

$r_0^2=\frac{1}{r^2}$ ……④

$\cos 2\theta_0=\cos^2\theta_0-\sin^2\theta_0$

$=(r_0r\cos\theta)^2-(-r_0r\sin\theta)^2$

$=r_0^2r^2\cos 2\theta$

$=\cos 2\theta$ ……⑤

④，⑤を③に代入して

$\frac{1}{r^2}\cdot\cos 2\theta=1$

$r^2=\cos 2\theta$

2 (1) 楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ (2) $r=\frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$

(3) 点R，Qの座標をそれぞれR$(r_1,\ \alpha)$，Q$(r_2,\ \alpha+\pi)$とすると

$\frac{1}{\mathrm{RA}}+\frac{1}{\mathrm{QA}}$

$=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$

$=2+\sqrt{3}\cos\alpha+2+\sqrt{3}\cos(\alpha+\pi)$

$\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$ であるから，この値は4で一定である。

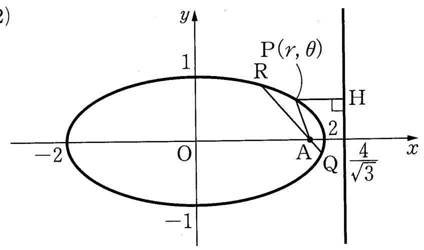
解説 (1) 点Pから直線$x=\frac{4}{\sqrt{3}}$に下ろした垂線をPHとすると，点Hの座標は$\left(\frac{4}{\sqrt{3}},\ y\right)$である。

PA：PH$=\sqrt{3}:2$ より，$3\mathrm{PH}^2=4\mathrm{PA}^2$

$3\left(x-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=4\{(x-\sqrt{3})^2+y^2\}$

整理すると，$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2)



楕円上の点をP$(r,\ \theta)$とすると

PA：PH$=r:\left(\frac{4}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}-r\cos\theta\right)$

$=\sqrt{3}:2$

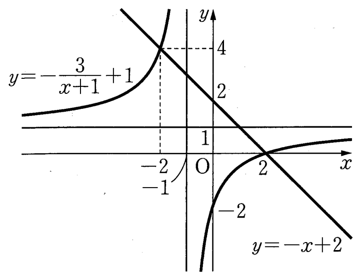
$2r=\sqrt{3}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}-r\cos\theta\right)$

これを整理すると，$r=\frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$

第10講 関数(1) ―分数関数・無理関数―

P.48〜P.49 **類題**

1 (1)



共有点のx座標 ±2

(2) $x\leqq-2$，$-1<x\leqq 2$

解説 (1) $y=-\frac{3}{x+1}+1$ のグラフは，直角双曲線 $y=-\frac{3}{x}$ をx軸方向に-1，y軸方向に1だけ平行移動したものである。

また，共有点のx座標は方程式

$-\frac{3}{x+1}+1=-x+2$

の実数解である。

$-\frac{3}{x+1}=-x+1$

$3=(x-1)(x+1)$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

これは双曲線の方程式の分母を0としないから，共有点のx座標は±2である。

(2) 不等式 $-\frac{3}{x+1}+1\leqq -x+2$ の解は，

$y=-\frac{3}{x+1}+1$ のグラフが，共有点も含めて，$y=-x+2$ のグラフの下方にあるようなxの値の範囲であるから

$x\leqq-2$，$-1<x\leqq 2$

2 (1) $(-6,\ 4)$

(2) $k=\frac{5}{2}$

接点の座標 $\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$

(3) $2\leqq k<\frac{5}{2}$

解説 $y=\sqrt{-2x+4}$ と $y=-x+k$ より，yを消去すると

$\sqrt{-2x+4}=-x+k$ ……①

(1) $k=-2$ のとき，①は

$\sqrt{-2x+4}=-x-2$ ……②

両辺を2乗すると

$-2x+4=(-x-2)^2$

$x^2+6x=0$

$x(x+6)=0$

$x=0,\ -6$

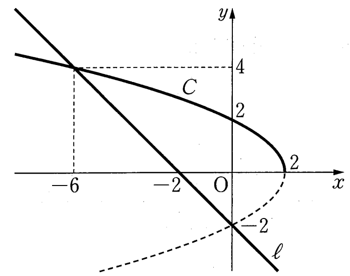
このうち，②を満たすのは，$x=-6$

$y=\sqrt{-2x+4}$ より，$x=-6$ のとき

$y=4$

したがって，共有点の座標は

$(-6,\ 4)$



(2) ①の両辺を2乗して

$-2x+4=(-x+k)^2$

$x^2-2(k-1)x+k^2-4=0$ ……③

Cとℓが接するとき，③が重解をもつから，判別式をDとすると

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-4)=0$

$-2k+5=0$

$k=\frac{5}{2}$

このとき，③より

$x^2-3x+\frac{9}{4}=0$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=0$

$x=\frac{3}{2}$

となり，①も成り立つ。

また，$y=\sqrt{-2x+4}$ より

$x=\frac{3}{2}$ のとき，$y=1$

したがって，求めるkの値は，$k=\frac{5}{2}$

接点の座標は，$\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$

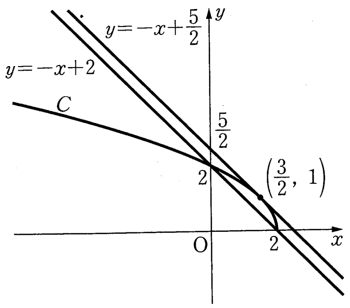
(3) ℓが点$(2,\ 0)$を通るとき

$0=-2+k$

$k=2$

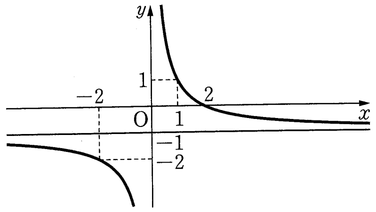
これと(2)の結果，およびグラフより，求めるkの値の範囲は

$2\leqq k<\frac{5}{2}$



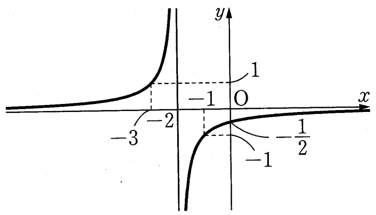
P.50 **演習問題**

1 (1)



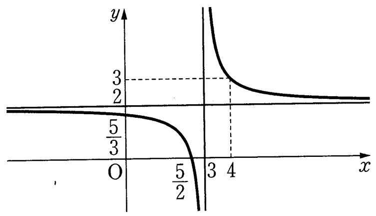
漸近線 $x=0$, $y=-1$

(2)



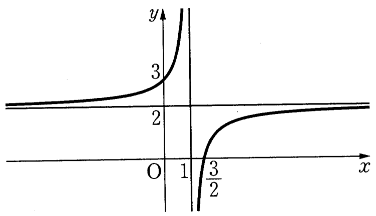
漸近線 $x=-2$, $y=0$

(3)



漸近線 $x=3$, $y=2$

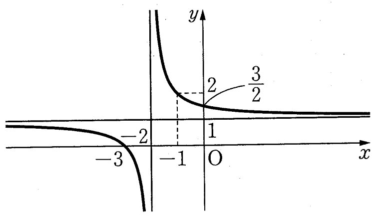
(4)



漸近線 $x=1$, $y=2$

解説 (4) $y=\frac{2x-3}{x-1}=-\frac{1}{x-1}+2$

2 (1)



(2) ① $-2<x<-1$

② $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\leqq x<-2,\ \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\leqq x$

解説 (1) $y=\frac{x+3}{x+2}=\frac{1}{x+2}+1$

(2) ① $\frac{x+3}{x+2}=2$ を解くと

$x+3=2(x+2)$

$x+3=2x+4$

ゆえに, $x=-1$

グラフより, $-2<x<-1$

② $\frac{x+3}{x+2}=x$ を解くと

$x+3=x(x+2)$

$x^2+x-3=0$

ゆえに, $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

グラフより

$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\leqq x<-2,\ \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\leqq x$

3 (1) $a=2,\ b=2,\ c=-1$

(2) $a=-2,\ b=6,\ c=-3$

解説 (1) 漸近線 $x=1$, $y=2$ をもつ双曲線は

$y=\frac{k}{x-1}+2$ とおける。

点(2, 6)を通るから

$6=k+2$

$k=4$

このとき, $y=\frac{4}{x-1}+2=\frac{2x+2}{x-1}$ となり,

これが $y=\frac{ax+b}{x+c}$ と等しいから

$a=2,\ b=2,\ c=-1$

(2) (1)と同じように考えて

$y=\frac{k}{2x-1}-\frac{1}{3}$ とおける。

点(1, 1)を通るから

$1=k-\frac{1}{3}$

$k=\frac{4}{3}$

このとき, $y=\frac{4}{3(2x-1)}-\frac{1}{3}=\frac{-2x+5}{6x-3}$

となり, これが $y=\frac{ax+5}{bx+c}$ と等しいから

$a=-2,\ b=6,\ c=-3$

4 $p=2,\ q=3$

解説 $y=\frac{x+2}{x+1}=\frac{1}{x+1}+1$ ……①

$y=\frac{4x-3}{x-1}=\frac{1}{x-1}+4$ ……②

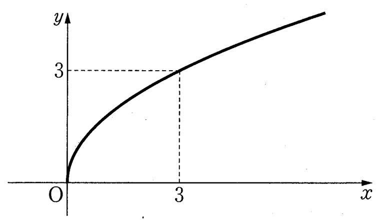
①の漸近線は, 2直線 $x=-1$, $y=1$

②の漸近線は, 2直線 $x=1$, $y=4$

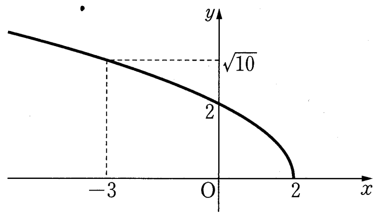
よって, ①を x 軸方向に2, y 軸方向に3だけ平行移動すると, ②が得られるから

$p=2,\ q=3$

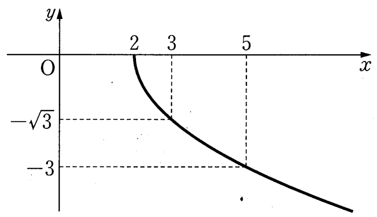
5 (1)



(2)



(3)



6 $\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\leqq x\leqq 2$

解説 交点の x 座標は方程式 $\sqrt{2-x}=2x$ を解く。

x のとりうる値の範囲は, $2-x\geqq 0$, $2x\geqq 0$ より

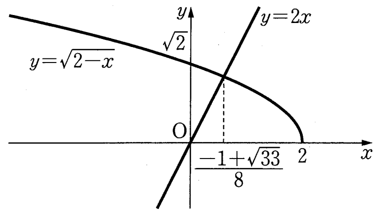
$0\leqq x\leqq 2$ ……①

この条件のもとに方程式を2乗すると

$2-x=4x^2$

$4x^2+x-2=0$

①より, $x=\frac{-1+\sqrt{33}}{8}$ であるから求める範囲はグラフより, $\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\leqq x\leqq 2$



7 $0<k$ のとき, 0個

$k<-\frac{1}{2}$, $k=0$ のとき, 1個

$-\frac{1}{2}\leqq k<0$ のとき, 2個

解説 $y=\sqrt{2x-1}$ のグラフと直線 $y=x+k$ が接するときの k の値は

$2x-1=(x+k)^2$

$x^2+2(k-1)x+k^2+1=0$

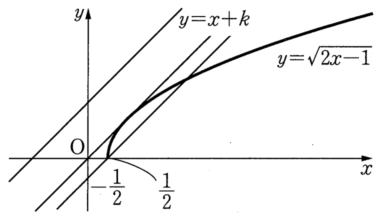
この方程式が重解をもつから, 判別式を D として

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2+1)=-2k=0$

より, $k=0$

また, 直線 $y=x+k$ が点$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$を通るとき,

$k=-\frac{1}{2}$ である。



したがって, グラフより共有点の数は

$0<k$ のとき, 0個

$k<-\frac{1}{2}$, $k=0$ のとき, 1個

$-\frac{1}{2}\leqq k<0$ のとき, 2個

P.51 **入試問題演習**

STEP 1

1 ア $\frac{3x-1}{2x+1}$ イ $\frac{-3x-1}{2x-1}$ ウ $\frac{3x+7}{2x+3}$

エ $(-2,\ -1)$ オ $\left(\frac{1}{6},\ \frac{9}{4}\right)$

(エ, オは入れかえ可)

解説 C_1 は

$y-\frac{3}{2}=-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=-\frac{5}{4x+2}$

より

$$y=-\frac{5}{4x+2}+\frac{3}{2}=\frac{3x-1}{2x+1}\quad\cdots\cdots①$$

C_2は，$y=\frac{3x-1}{2x+1}$ の x，y のかわりにそれぞれ $-x$，$-y$ とおくと

$$-y=\frac{-3x-1}{-2x+1}$$

ゆえに，$y=\frac{-3x-1}{2x-1}$

C_3は，C_1を直線 $x=-1$ に関して対称移動したものであるから，①において，xのかわりに $-2-x$ とおくと

$$y=\frac{3(-2-x)-1}{2(-2-x)+1}=\frac{3x+7}{2x+3}$$

よって，C_2とC_3の交点のx座標は

$$\frac{-3x-1}{2x-1}=\frac{3x+7}{2x+3}$$

$$6x^2+11x-2=0$$

$$(x+2)(6x-1)=0$$

$$x=-2,\ \frac{1}{6}$$

このとき，$y=-1,\ \frac{9}{4}$ となるから，交点の座標は，$(-2,\ -1)$，$\left(\frac{1}{6},\ \frac{9}{4}\right)$

2 $k\geqq3$

解説 直線 $y=-x+k$ が曲線 $y=\frac{1}{x-1}$ に $x>0$ の部分で接するとき

$$\frac{1}{x-1}=-x+k$$

$$1=(x-1)(-x+k)$$

$$1=-x^2+kx+x-k$$

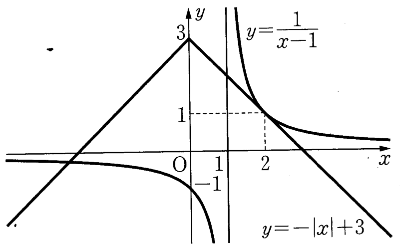
$$x^2-(k+1)x+k+1=0\quad\cdots\cdots①$$

①の判別式をDとすると

$$D=(k+1)^2-4(k+1)=(k+1)(k-3)=0$$

$k=-1$ のとき，①の重解は$x=0$ となって不適である。

$k=3$ のとき，①の重解は $x=2$ となり，適する。



したがって，上の図より，2つのグラフが2個以上の点を共有するのは，$k\geqq3$ のときである。

3 ア $\left(-\frac{2}{3},\ 0\right)$　イ $(0,\ \sqrt{2})$

ウ $-\sqrt{-3x+2}$

解説 $y=\sqrt{3x+2}$ ……① において

$y=0$ とおくと，$x=-\frac{2}{3}$

$x=0$ とおくと，$y=\sqrt{2}$

したがって，x軸との交点の座標は$\left(-\frac{2}{3},\ 0\right)$，$y$軸との交点の座標は$(0,\ \sqrt{2})$である。

原点に関して対称な曲線の方程式は，①においてx，yのかわりにそれぞれ$-x$，$-y$とおくと

$$-y=\sqrt{-3x+2}$$

ゆえに，$y=-\sqrt{-3x+2}$

4 ア 9　イ 0

解説 $y=\sqrt{a-4x}+b$ はxの値が増加すると，yの値は減少するから，$x=-4$ で最大値5をとる。

$$\sqrt{a+16}+b=5\quad\cdots\cdots①$$

また，$x=0$ で最小値3をとる。よって

$$\sqrt{a}+b=3\quad\cdots\cdots②$$

①−②より

$$\sqrt{a+16}-\sqrt{a}=2$$

$$\sqrt{a+16}=\sqrt{a}+2$$

両辺を2乗すると

$$a+16=a+4\sqrt{a}+4$$

$$\sqrt{a}=3$$

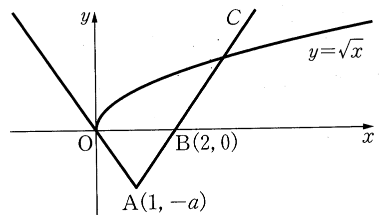
$$a=9$$

②に代入して，$b=0$

5 $a<-1$

解説 $C: y=a|x-1|-a$ のグラフは，$a=0$ のとき x軸，それ以外のとき3点O$(0,\ 0)$，A$(1,\ -a)$，B$(2,\ 0)$を通る折れ線である。

(i) $a>0$ のとき

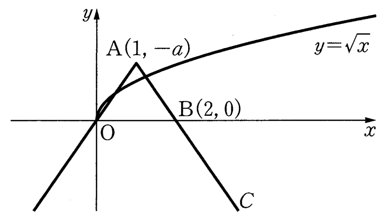


グラフより，Cと$y=\sqrt{x}$のグラフの共有点は2個である。

(ii) $a=0$ のとき

共有点は原点の1個

(iii) $a<0$ のとき



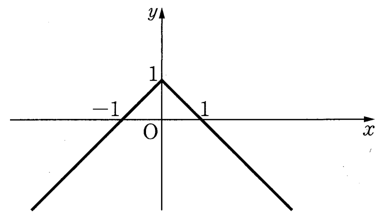
Cが$y=\sqrt{x}$のグラフと異なる3つの共有点をもつための条件は，点Aが$y>\sqrt{x}$の表す領域に存在することである。

$$-a>\sqrt{1}$$

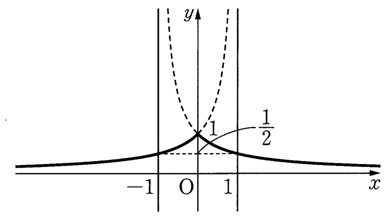
ゆえに，$a<-1$

STEP 2

1 (1) (ア)



(イ)



(2) $-a+b\leqq\frac{1}{2}$ かつ $a+b\leqq\frac{1}{2}$

(3) $1-\frac{4}{3}b$

解説 (2) $|x|=1$ のとき，不等式は成り立つ。

$-1<x<1$ のとき

$$(ax+b)(1-x^2)$$

$$=(ax+b)(1-|x|^2)\leqq1-|x|$$

より

$$ax+b\leqq\frac{1-|x|}{1-|x|^2}=\frac{1}{1+|x|}$$

すなわち，$y=ax+b$ のグラフが $-1\leqq x\leqq1$ で(イ)のグラフより下側にあればよい。

(イ)のグラフの点$\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$を考えて，求める条件は

$$-a+b\leqq\frac{1}{2}\ かつ\ a+b\leqq\frac{1}{2}$$

(3) 求める面積は

$$\int_{-1}^{1}\{(1-|x|)-(ax+b)(1-x^2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(1-|x|)dx-\int_{-1}^{1}(ax+b)(1-x^2)dx$$

$$=1-\int_{-1}^{1}(-ax^3-bx^2+ax+b)dx$$

$$=1-2\int_{0}^{1}(-bx^2+b)dx$$

$$=1+2b\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1$$

$$=1-\frac{4}{3}b$$

第11講 関数(2) —逆関数・合成関数—

P.53〜P.54 類題

1 (1) $f^{-1}(x)=\frac{x+2}{x-1}$

定義域 $x\neq1$

値域 $f^{-1}(x)\neq1$

(2) $f^{-1}(x)=\log_2 x$

定義域 $x>0$

値域 実数全体

(3) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}$

定義域 $x\geqq-1$

値域 $f^{-1}(x)\leqq0$

解説 (1) $f(x)=\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{x-1}+1$ より,

$f(x)$ の定義域は, $x\neq1$

値域は, $f(x)\neq1$

$y=\frac{x+2}{x-1}$ とおくと

$(x-1)y=x+2$

$(y-1)x=y+2$

$y\neq1$ より, $x=\frac{y+2}{y-1}$

x と y を交換して, $y=\frac{x+2}{x-1}$

したがって

$f^{-1}(x)=\frac{x+2}{x-1}$

$f^{-1}(x)$ の定義域は, $x\neq1$

値域は, $f^{-1}(x)\neq1$

(2) $f(x)=2^x$ の定義域は, 実数全体

値域は, $f(x)>0$

$y=2^x$ とおくと, $x=\log_2 y$

x と y を交換して, $y=\log_2 x$

したがって

$f^{-1}(x)=\log_2 x$

$f^{-1}(x)$ の定義域は, $x>0$

値域は, 実数全体

(3) $f(x)=x^2-1$ $(x\leqq0)$ の

定義域は, $x\leqq0$

値域は, $f(x)\geqq-1$

$y=x^2-1$ とおくと, $x^2=y+1$

$x\leqq0$ より, $x=-\sqrt{y+1}$

x と y を交換して, $y=-\sqrt{x+1}$

したがって

$f^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}$

$f^{-1}(x)$ の定義域は, $x\geqq-1$

値域は, $f^{-1}(x)\leqq0$

2 $a=-3$, $b=11$, $c=-1$

解説 逆関数のグラフともとの関数のグラフは直線 $y=x$ に関して対称であるから, もとのグラフは, 2直線 $x=1$, $y=-3$ を漸近線にもち, かつ点 $(5,\ -1)$ を通る。

$x=1$, $y=-3$ を漸近線にもつ双曲線は

$y=\frac{k}{x-1}-3$ ……① (k は定数)

と表され, これが点 $(5,\ -1)$ を通ることから

$-1=\frac{k}{4}-3$

ゆえに, $k=8$

①に代入して

$y=\frac{8}{x-1}-3=\frac{-3x+11}{x-1}$

これが $y=\frac{ax+b}{x+c}$ と等しいから

$a=-3$, $b=11$, $c=-1$

3 $a=-\frac{1}{2}$

解説 $y=2ax+3a$ とおき, x について解く。

1次関数だから, $a\neq0$ で

$y-3a=2ax$

$x=\frac{y-3a}{2a}$

したがって, $f^{-1}(x)=\frac{x-3a}{2a}=\frac{1}{2a}x-\frac{3}{2}$

$f^{-1}(x)=f(x)$ より

$$\begin{cases}\frac{1}{2a}=2a & \cdots\cdots① \\ -\frac{3}{2}=3a & \cdots\cdots②\end{cases}$$

が同時に成り立つ。

②より, $a=-\frac{1}{2}$

これは①も満たす。

したがって, $a=-\frac{1}{2}$

4 (1) $(f\circ g)(x)=-16x^2+1$

定義域 実数全体

値域 $(f\circ g)(x)\leqq1$

(2) $(g\circ f)(x)=-4x^2+4$

定義域 実数全体

値域 $(g\circ f)(x)\leqq4$

解説 (1) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=-(4x)^2+1$

$=-16x^2+1$

定義域は, 実数全体

値域は, $(f\circ g)(x)\leqq1$

(2) $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=4(-x^2+1)$

$=-4x^2+4$

定義域は, 実数全体

値域は, $(g\circ f)(x)\leqq4$

P.55 演習問題

1 (1) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ (2) $y=\frac{3x+5}{x-2}$

(3) $y=x^2+1$ $(x\geqq0)$ (4) $y=\log_3 x$

(5) $y=10^x$

解説 (1) $y=2x-1$ を x について解くと

$x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$

x と y を交換して, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

(2) $y=\frac{2x+5}{x-3}=\frac{11}{x-3}+2$ より, $y\neq2$ で

$y(x-3)=2x+5$

$(y-2)x=3y+5$

$y\neq2$ より, $x=\frac{3y+5}{y-2}$

x と y を交換して, $y=\frac{3x+5}{x-2}$

(3) $y=\sqrt{x-1}$ $(x\geqq1)$ より, $y\geqq0$ で

$y^2=x-1$

$x=y^2+1$

x と y を交換して, $y=x^2+1$

ただし, $x\geqq0$ である。

(4) $y=3^x$ より, $x=\log_3 y$

x と y を交換して, $y=\log_3 x$

(5) $y=\log_{10}x$ より, $x=10^y$

x と y を交換して, $y=10^x$

2 (1) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$

(2) $y=\frac{-x+2\sqrt{x^2-3}}{3}$ $(x\geqq2)$

解説 (1) $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$ $(a>0,\ a\neq1)$ より

$2y=a^x-\frac{1}{a^x}$

$(a^x)^2-2ya^x-1=0$

$a^x>0$ だから

$a^x=y+\sqrt{y^2+1}$

$x=\log_a(y+\sqrt{y^2+1})$

x と y を交換して, $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$

(2) $x\geqq0$ のとき

$y=x+2\sqrt{1+x^2}\geqq2$

であり

$y-x=2\sqrt{1+x^2}$

$(y-x)^2=4(1+x^2)$

$3x^2+2yx-y^2+4=0$

$x\geqq0$ より

$x=\frac{-y+2\sqrt{y^2-3}}{3}$

x と y を交換して

$y=\frac{-x+2\sqrt{x^2-3}}{3}$ $(x\geqq2)$

3 $a=-2$, $b=\frac{7}{9}$

解説 $f^{-1}(3)=1$, $f^{-1}(5)=b$ より

$f(1)=3$, $f(b)=5$

であるから

$$\begin{cases}1-a=3 & \cdots\cdots① \\ \frac{b-a}{2b-1}=5 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①より, $a=-2$

②に代入して

$\frac{b+2}{2b-1}=5$

$b+2=5(2b-1)$

$b=\frac{7}{9}$

したがって, $a=-2$, $b=\frac{7}{9}$

4 (1) **$a=1$, $b=0$ または $a=-1$, b は任意の実数**

(2) $a=-2$

解説 (1) $a\neq0$ だから, $y=ax+b$ より

$x=\frac{y-b}{a}=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$

したがって, 逆関数は, $y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$

これが $y=ax+b$ と一致するから

$$\begin{cases}a=\frac{1}{a} & \cdots\cdots① \\ b=-\frac{b}{a} & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①より, $a^2=1$

$a=\pm1$

$a=1$ のとき, ②より, $b=0$

$a=-1$ のとき, ②より, b は任意の実数

(2) $y=\frac{ax-3}{x+2}=\frac{-2a-3}{x+2}+a$ より, $y\neq a$ で

$y(x+2)=ax-3$

$(y-a)x=-2y-3$

$x=\frac{-2y-3}{y-a}$

x と y を交換して, $f^{-1}(x)=\frac{-2x-3}{x-a}$

$f(x)=f^{-1}(x)$ より

$\frac{ax-3}{x+2}=\frac{-2x-3}{x-a}$

$(ax-3)(x-a)=(-2x-3)(x+2)$

$ax^2-(a^2+3)x+3a=-2x^2-7x-6$

係数を比較して

$$\begin{cases} a=-2 \\ a^2+3=7 \\ 3a=-6 \end{cases}$$

したがって，$a=-2$

5 (1) $(g\circ f)(x)=\dfrac{5x-1}{x+1}$

(2) $(f\circ g)(x)=\dfrac{3x+1}{3x+3}$

(3) $(g\circ g)(x)=9x+8$　　(4) $(f\circ f)(x)=-\dfrac{1}{x}$

解説 (1) $(g\circ f)(x)=3\cdot\dfrac{x-1}{x+1}+2$

$=\dfrac{5x-1}{x+1}$

(2) $(f\circ g)(x)=\dfrac{(3x+2)-1}{(3x+2)+1}$

$=\dfrac{3x+1}{3x+3}$

(3) $(g\circ g)(x)=3(3x+2)+2$

$=9x+8$

(4) $(f\circ f)(x)=\dfrac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=\dfrac{\frac{-2}{x+1}}{\frac{2x}{x+1}}$

$=\dfrac{-2}{2x}$

$=-\dfrac{1}{x}$

6 (1) $(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{8}$

(2) $(g\circ f)^{-1}(x)=\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{8}$

解説 (1) $f(x)=4x-1=y$ とおくと

$x=\dfrac{1}{4}y+\dfrac{1}{4}$

x と y を交換して，$y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}$

よって，$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}$

同様にして，$g^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$

したがって

$(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{8}$

(2) $(g\circ f)(x)=2(4x-1)+3$

$=8x+1=y$

とおくと

$x=\dfrac{1}{8}y-\dfrac{1}{8}$

x と y を交換して，$y=\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{8}$

よって，$(g\circ f)^{-1}(x)=\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{8}$

7 $y=\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{3}{x+1}+1$ **とおくと，**$y\neq1$ **で**

$y(x+1)=x-2$

$(y-1)x=-y-2$

$x=\dfrac{-y-2}{y-1}$

x と y を交換して

$y=\dfrac{-x-2}{x-1}$

したがって，$f^{-1}(x)=\dfrac{-x-2}{x-1}$ **となるから**

$(f\circ f^{-1})(x)=\dfrac{\frac{-x-2}{x-1}-2}{\frac{-x-2}{x-1}+1}=\dfrac{-3x}{-3}$

$=x$

$(f^{-1}\circ f)(x)=\dfrac{-\frac{x-2}{x+1}-2}{\frac{x-2}{x+1}-1}=\dfrac{-3x}{-3}$

$=x$

したがって，$(f\circ f^{-1})(x)=x$，$(f^{-1}\circ f)(x)=x$ **が成り立つ。**

P.56 **入試問題演習**

STEP 1

1 (1) ア $\dfrac{x^2-1}{2}$　イ 0　ウ $-\dfrac{1}{2}$

(2) $y=\log_3\dfrac{3x+\sqrt{9x^2+4}}{2}$

解説 (1) $y=\sqrt{2x+1}$ において

$x\geqq-\dfrac{1}{2}$，$y\geqq0$

両辺を2乗して

$y^2=2x+1$

$x=\dfrac{y^2-1}{2}$

x と y を交換して，$y=\dfrac{x^2-1}{2}$

ただし，$x\geqq0$，$y\geqq-\dfrac{1}{2}$

(2) 与えられた式を x について解く。

$3y=3^x-\dfrac{1}{3^x}$

$(3^x)^2-3y\cdot3^x-1=0$

$3^x>0$ だから，$3^x=\dfrac{3y+\sqrt{9y^2+4}}{2}$

$x=\log_3\dfrac{3y+\sqrt{9y^2+4}}{2}$

x と y を交換して

$y=\log_3\dfrac{3x+\sqrt{9x^2+4}}{2}$

2 $a=-2$，$b=5$

解説 点(1, 1)を通るから

$1=\dfrac{a+b}{3}$

$a+b=3$

$y=\dfrac{ax+b}{x+2}=\dfrac{b-2a}{x+2}+a$ より，$y\neq a$ で

$y(x+2)=ax+b$

$(y-a)x=-2y+b$

x について解くと，$x=\dfrac{-2y+b}{y-a}$

x と y を交換すると，逆関数は $y=\dfrac{-2x+b}{x-a}$

で，題意より，$\dfrac{ax+b}{x+2}=\dfrac{-2x+b}{x-a}$ が成り立つ。

$(ax+b)(x-a)=(-2x+b)(x+2)$

$ax^2+(b-a^2)x-ab=-2x^2+(b-4)x+2b$

ゆえに，$a=-2$，$b-a^2=b-4$，$-ab=2b$

$a=-2$ はこの3つの式を満たすから，b の値は

$a+b=3$ より，$b=5$

3 (1) $-6<x\leqq2$　(2) $2\leqq k<\dfrac{5}{2}$

解説 (1) $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2\ (x\leqq0)$ より

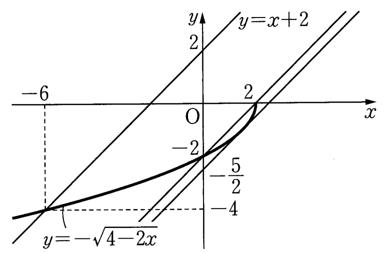
$\dfrac{1}{2}x^2=2-y$

$x^2=4-2y$

$x\leqq0$ より，$x=-\sqrt{4-2y}$

x と y を交換して，$y=-\sqrt{4-2x}$

よって，$y=g(x)=-\sqrt{4-2x}$



このグラフは上の図のようになり，このグラフと直線 $y=x+2$ の交点は $(-6,\ -4)$ であるから，与えられた不等式を満たす x の範囲は

$-6<x\leqq2$

(2) $x-k=-\sqrt{4-2x}$

両辺を2乗して整理すると

$x^2-2(k-1)x+k^2-4=0$

直線 $y=x-k$ が曲線 $y=-\sqrt{4-2x}$ に接するとき，判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-4)$

$=-2k+5=0$

ゆえに，$k=\dfrac{5}{2}$

直線が点(2, 0)を通るとき

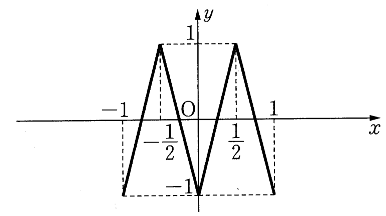
$0=2-k$

$k=2$

したがって，求める定数 k の値の範囲は，

$2\leqq k<\dfrac{5}{2}$ である。

4 (1)



(2) $a=\pm1$，$\pm\dfrac{1}{3}$

解説 (1) (i) $-1\leqq x\leqq-\dfrac{1}{2}$ のとき

$-1\leqq2x+1\leqq0$ であるから

$(f\circ f)(x)=2(2x+1)+1$

$=4x+3$

(ii) $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq0$ のとき

$0\leqq2x+1\leqq1$ であるから

$(f\circ f)(x)=-2(2x+1)+1$

$=-4x-1$

(iii) $0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$0\leqq-2x+1\leqq1$ であるから

$(f\circ f)(x)=-2(-2x+1)+1$

$=4x-1$

(iv) $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq1$ のとき

$-1\leqq-2x+1\leqq0$ であるから

$(f\circ f)(x)=2(-2x+1)+1=-4x+3$

したがって，$y=(f\circ f)(x)$ のグラフは解答のようになる。

(2) $-1\leqq x\leqq0$ のとき，グラフと $y=2x+1$ のグラフの交点の x 座標を求めると，$x=-1$ は明らか。

次に，$y=2x+1$，$y=-4x-1$ を連立して

解くと，$x=-\frac{1}{3}$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき，グラフと $y=-2x+1$ のグラフの交点の x 座標は対称性から，

$x=\frac{1}{3}$，1 である。

よって，$a=\pm1,\ \pm\frac{1}{3}$

5 $a=1,\ b=-2,\ c=3$

$(g\circ f)(x)=x$，$(g\circ g)(x)=\frac{x-4}{8x-7}$

解説 $(f\circ g)(x)=\frac{3g(x)-1}{2g(x)+1}$

$$=\frac{3(ax+1)-(bx+c)}{2(ax+1)+bx+c}$$

$$=\frac{(3a-b)x+(3-c)}{(2a+b)x+(2+c)}=x$$

$\{(2a+b)x+(2+c)\}x=(3a-b)x+(3-c)$

これがつねに成り立つから

$2a+b=0$，$2+c=3a-b$，$3-c=0$

ゆえに，$a=1$，$b=-2$，$c=3$

このとき，$g(x)=\frac{x+1}{-2x+3}$ となるから

$$(g\circ f)(x)=\frac{f(x)+1}{-2f(x)+3}$$

$$=\frac{(3x-1)+(2x+1)}{-2(3x-1)+3(2x+1)}$$

$$=\frac{5x}{5}=x$$

$$(g\circ g)(x)=\frac{g(x)+1}{-2g(x)+3}$$

$$=\frac{(x+1)+(-2x+3)}{-2(x+1)+3(-2x+3)}$$

$$=\frac{x-4}{8x-7}$$

となる。

STEP2

1 (1) **数学的帰納法を用いる。**

(I) $g_1(x)=f(x)=-4x^2+4x$

$$=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$$

より，$0\leqq x\leqq1$ のとき，$0\leqq g_1(x)\leqq1$

(II) $0\leqq g_k(x)\leqq1$ と仮定し，$g_k(x)=t$ とおくと

$g_{k+1}(x)=f(g_k(x))=f(t)$

$0\leqq t\leqq 1$ であるから，(I)と同じように考えて，$0\leqq f(t)\leqq1$ が成り立つ。したがって，$0\leqq g_{k+1}(x)\leqq1$ である。

(I)，(II)より，$0\leqq g_n(x)\leqq1$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

(2) (I) $g_1(x)=f(x)=4x(1-x)$

$$=4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$$

$$=4\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=\sin^2 2\theta$$

より，$n=1$ のとき成り立つ。

(II) $g_k(x)=\sin^2(2^k\theta)$ が成り立つとすると

$g_{k+1}(x)=f(g_k(x))=f(\sin^2(2^k\theta))$

$$=4\sin^2(2^k\theta)(1-\sin^2(2^k\theta))$$

$$=4\sin^2(2^k\theta)\cos^2(2^k\theta)$$

$$=\sin^2(2\cdot2^k\theta)$$

$$=\sin^2(2^{k+1}\theta)$$

したがって，$n=k+1$ のときにも成り立つ。

(I)，(II)より，$g_n(x)=\sin^2(2^n\theta)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

(3) **4 個**

解説(3) (1)，(2)の結果より，$g_2(x)=x$ は $\sin^2 4\theta=\sin^2\theta$ と表せるから

$\sin^2 4\theta-\sin^2\theta=0$ ……①

$(\sin4\theta+\sin\theta)(\sin4\theta-\sin\theta)=0$

$$2\sin\frac{5\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\cdot 2\cos\frac{5\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}=0$$

$0\leqq\frac{5\theta}{2}\leqq\frac{5}{4}\pi$，$0\leqq\frac{3\theta}{2}\leqq\frac{3}{4}\pi$ より

$\frac{5\theta}{2}=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$

$\frac{3\theta}{2}=0,\ \frac{\pi}{2}$

$\theta=0,\ \frac{\pi}{5},\ \frac{2}{5}\pi,\ \frac{\pi}{3}$

よって

$x=\sin^2 0,\ \sin^2\frac{\pi}{5},\ \sin^2\frac{2}{5}\pi,\ \sin^2\frac{\pi}{3}$

となり，これらはすべて異なる値であるから，解は 4 個である。

第12講 数列の極限

P.58～P.59 類題

1 (1) 5　(2) 0　(3) 2　(4) 振動する　(5) $-\infty$　(6) 4

解説(1) $n\to\infty$ のとき

$\frac{1}{n^4}\to0$，$\frac{3}{n^2}\to0$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}-\frac{3}{n^2}+5\right)=5$$

(2) $$\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}=\frac{(2n+1)-(2n-1)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$n\to\infty$ のとき，分母$\to\infty$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})=0$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n^2+1}{n^3+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=2$$

(4) $-\frac{4}{3}<-1$ であるから，振動する。

(5) $$2^n+3^n-5^n=5^n\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right\}$$

$n\to\infty$ のとき

$5^n\to\infty$，$\left(\frac{2}{5}\right)^n\to0$，$\left(\frac{3}{5}\right)^n\to0$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n-5^n)=-\infty$$

(6) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+2^n}{4^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$=4$$

2 (1) $-\frac{1}{2}$　(2) $\frac{1}{3}$　(3) 2　(4) 振動する

解説(1) $|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}r^n=0$ であるから，

極限値は，$-\frac{1}{2}$

(2) $r=1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}r^n=1$ であるから，

極限値は，$\frac{1}{3}$

(3) $r>1$ のとき，$0<\frac{1}{r}<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n-1}{r^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1+2\left(\frac{1}{r}\right)^n}$$

$$=2$$

(4) $r=-1$ のとき

n が偶数のとき，$\frac{1}{3}$

n が奇数のとき，-3

したがって，振動する。

3 0

解説 $-1\leqq\cos\frac{n\pi}{6}\leqq1$ より

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqq\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{6}\leqq\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{6}=0$$

4 -3

解説 $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n-1$ を変形して

$$a_{n+1}+3=\frac{2}{3}(a_n+3)$$

よって，数列 $\{a_n+3\}$ は

初項が $a_1+3=1$，公比が $\frac{2}{3}$

の等比数列をなすから

$$a_n+3=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

したがって

$$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-3$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=-3$$

P.60 演習問題

1 (1) 2　(2) -2　(3) 0　(4) $\frac{1}{2}$　(5) ∞　(6) 振動する

解説(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n-5}{2n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}$$

$$=2$$