次に，$y=2x+1$，$y=-4x-1$ を連立して解くと，$x=-\frac{1}{3}$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき，グラフと $y=-2x+1$ のグラフの交点の x 座標は対称性から，

$x=\frac{1}{3}$，1 である。

よって，$a=\pm1$，$\pm\frac{1}{3}$

5 $\boldsymbol{a=1,\ b=-2,\ c=3}$

$\boldsymbol{(g\circ f)(x)=x,\ (g\circ g)(x)=\frac{x-4}{8x-7}}$

解説 $(f\circ g)(x)=\frac{3g(x)-1}{2g(x)+1}$

$$=\frac{3(ax+1)-(bx+c)}{2(ax+1)+bx+c}$$

$$=\frac{(3a-b)x+(3-c)}{(2a+b)x+(2+c)}=x$$

$\{(2a+b)x+(2+c)\}x=(3a-b)x+(3-c)$

これがつねに成り立つから

$2a+b=0$，$2+c=3a-b$，$3-c=0$

ゆえに，$a=1$，$b=-2$，$c=3$

このとき，$g(x)=\frac{x+1}{-2x+3}$ となるから

$$(g\circ f)(x)=\frac{f(x)+1}{-2f(x)+3}$$

$$=\frac{(3x-1)+(2x+1)}{-2(3x-1)+3(2x+1)}$$

$$=\frac{5x}{5}=x$$

$$(g\circ g)(x)=\frac{g(x)+1}{-2g(x)+3}$$

$$=\frac{(x+1)+(-2x+3)}{-2(x+1)+3(-2x+3)}$$

$$=\frac{x-4}{8x-7}$$

となる。

STEP 2

1 (1) **数学的帰納法を用いる。**

(I) $\boldsymbol{g_1(x)=f(x)=-4x^2+4x}$

$$\boldsymbol{=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

より，$\boldsymbol{0\leqq x\leqq 1}$ のとき，$\boldsymbol{0\leqq g_1(x)\leqq 1}$

(II) **$\boldsymbol{0\leqq g_k(x)\leqq 1}$ と仮定し，$\boldsymbol{g_k(x)=t}$ とおくと**

$\boldsymbol{g_{k+1}(x)=f(g_k(x))=f(t)}$

$\boldsymbol{0\leqq t\leqq 1}$ であるから，(I)と同じように考えて，$\boldsymbol{0\leqq f(t)\leqq 1}$ が成り立つ。したがって，$\boldsymbol{0\leqq g_{k+1}(x)\leqq 1}$ である。

(I)，(II)より，$\boldsymbol{0\leqq g_n(x)\leqq 1}$ $\boldsymbol{(n=1,\ 2,\ \cdots)}$

(2) (I) $\boldsymbol{g_1(x)=f(x)=4x(1-x)}$

$$\boldsymbol{=4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}$$

$$\boldsymbol{=4\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$\boldsymbol{=\sin^2 2\theta}$$

より，$\boldsymbol{n=1}$ のとき成り立つ。

(II) **$\boldsymbol{g_k(x)=\sin^2(2^k\theta)}$ が成り立つとすると**

$$\boldsymbol{g_{k+1}(x)=f(g_k(x))=f(\sin^2(2^k\theta))}$$

$$\boldsymbol{=4\sin^2(2^k\theta)(1-\sin^2(2^k\theta))}$$

$$\boldsymbol{=4\sin^2(2^k\theta)\cos^2(2^k\theta)}$$

$$\boldsymbol{=\sin^2(2\cdot 2^k\theta)}$$

$$\boldsymbol{=\sin^2(2^{k+1}\theta)}$$

したがって，$\boldsymbol{n=k+1}$ のときにも成り立つ。

(I)，(II)より，$\boldsymbol{g_n(x)=\sin^2(2^n\theta)}$ $\boldsymbol{(n=1,\ 2,\ \cdots)}$

(3) **4 個**

解説 (3) (1)，(2)の結果より，$g_2(x)=x$ は $\sin^2 4\theta=\sin^2\theta$ と表せるから

$\sin^2 4\theta-\sin^2\theta=0$ ……①

$(\sin 4\theta+\sin\theta)(\sin 4\theta-\sin\theta)=0$

$2\sin\frac{5\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\cdot 2\cos\frac{5\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}=0$

$0\leqq\frac{5\theta}{2}\leqq\frac{5}{4}\pi$，$0\leqq\frac{3\theta}{2}\leqq\frac{3}{4}\pi$ より

$\frac{5\theta}{2}=0$，$\frac{\pi}{2}$，π

$\frac{3\theta}{2}=0$，$\frac{\pi}{2}$

$\theta=0$，$\frac{\pi}{5}$，$\frac{2}{5}\pi$，$\frac{\pi}{3}$

よって

$x=\sin^2 0$，$\sin^2\frac{\pi}{5}$，$\sin^2\frac{2}{5}\pi$，$\sin^2\frac{\pi}{3}$

となり，これらはすべて異なる値であるから，解は 4 個である。

第12講 数列の極限

P.58～P.59 **類題**

1 (1) **5** (2) **0**

(3) **2** (4) **振動する**

(5) $\boldsymbol{-\infty}$ (6) **4**

解説 (1) $n\to\infty$ のとき

$\frac{1}{n^4}\to 0$，$\frac{3}{n^2}\to 0$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}-\frac{3}{n^2}+5\right)=5$$

(2) $\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}=\frac{(2n+1)-(2n-1)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

$$=\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$n\to\infty$ のとき，分母$\to\infty$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})=0$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n^2+1}{n^3+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=2$$

(4) $-\frac{4}{3}<-1$ であるから，振動する。

(5) $2^n+3^n-5^n=5^n\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right\}$

$n\to\infty$ のとき

$5^n\to\infty$，$\left(\frac{2}{5}\right)^n\to 0$，$\left(\frac{3}{5}\right)^n\to 0$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n-5^n)=-\infty$$

(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+2^n}{4^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

$$=4$$

2 (1) $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$ (2) $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

(3) **2** (4) **振動する**

解説 (1) $|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}r^n=0$ であるから，

極限値は，$-\frac{1}{2}$

(2) $r=1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}r^n=1$ であるから，

極限値は，$\frac{1}{3}$

(3) $r>1$ のとき，$0<\frac{1}{r}<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n-1}{r^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1+2\left(\frac{1}{r}\right)^n}$$

$$=2$$

(4) $r=-1$ のとき

n が偶数のとき，$\frac{1}{3}$

n が奇数のとき，-3

したがって，振動する。

3 **0**

解説 $-1\leqq\cos\frac{n\pi}{6}\leqq 1$ より

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqq\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{6}\leqq\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{6}=0$$

4 $\boldsymbol{-3}$

解説 $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n-1$ を変形して

$$a_{n+1}+3=\frac{2}{3}(a_n+3)$$

よって，数列 $\{a_n+3\}$ は

初項が $a_1+3=1$，公比が $\frac{2}{3}$

の等比数列をなすから

$$a_n+3=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

したがって

$$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-3$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=-3$$

P.60 **演習問題**

1 (1) **2** (2) $\boldsymbol{-2}$ (3) **0** (4) $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(5) $\boldsymbol{\infty}$ (6) **振動する**

解説 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n-5}{2n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}$

$$=2$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-5n}{1-3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{5}{n}}{\frac{1}{n^2}-3}$

$=-2$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{n+2}$

$=0$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

$=\dfrac{1}{2}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}+n)n}{n^2+1-n^2}$

$=\infty$

(6) $\displaystyle 4+(-1)^n\frac{2n}{n+1}=4+(-1)^n\frac{2}{1+\frac{1}{n}}$

であるから振動する。

2 (1) **0** (2) **∞**

(3) **振動する** (4) **-1**

(5) **$0\leqq\theta<\frac{\pi}{4}$ のとき，-1**

$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき，0

$\frac{\pi}{4}<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，1

(6) **0** (7) **0**

解説 (1) $-1<0.7<1$ だから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}0.7^n=0$

(2) $1.3>1$ だから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}1.3^n=\infty$

(3) $-\frac{1}{6}$ と $\frac{1}{6}$ が交互に表れるから，振動する。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-4^n}{2^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{4}\right)^n+1}$

$=-1$

(5) $\dfrac{\sin^n\theta-\cos^n\theta}{\sin^n\theta+\cos^n\theta}=A$ とおくと

(i) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{4}$ のとき

$$A=\frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n-1}{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n+1}$$

$0\leqq\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}<1$ より，極限値は -1

(ii) $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき

$\sin\theta=\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，極限値は 0

(iii) $\frac{\pi}{4}<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$$A=\frac{1-\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^n}{1+\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^n}$$

$0\leqq\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}<1$ より，極限値は 1

(6) $-\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{n}\sin n\theta\leqq\dfrac{1}{n}$

より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta=0$

(7) $-\dfrac{1}{n^3}\leqq\dfrac{\cos 4n\theta}{n^3}\leqq\dfrac{1}{n^3}$

(6)と同様に考えて，極限値は 0

3 (1) **$|r|>1$ のとき，-1**

$r=1$ のとき，0

$|r|<1$ のとき，1

(2) **$r>1$ のとき，r**

$r=1$ のとき，$\frac{1}{2}$

$0<r<1$ のとき，0

解説 (1) (i) $|r|>1$ のとき

$$\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1}$$

$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{1}{r^n}\to 0$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1}=-1$$

(ii) $r=1$ のとき，0

(iii) $|r|<1$ のとき

$n\to\infty$ のとき，$r^n\to 0$ より，極限値は 1 になる。

(2) (i) $r>1$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{\frac{1}{r^n}+1}=r$$

(ii) $r=1$ のとき

$r^n=r^{n+1}=1$ より，$\frac{1}{2}$

(iii) $0<r<1$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{1+r^n}=0$$

4 (1) **1** (2) **$\frac{1}{2}$**

解説 (1) $a_n=\dfrac{(n+3)(n+5)}{n(n+1)}=\dfrac{1+\frac{8}{n}+\frac{15}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$

であるから，$n\to\infty$ のとき，$a_n\to 1$

(2) $a_n=\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

であるから，$n\to\infty$ のとき，$a_n\to\frac{1}{2}$

5 (1) **$a_n=3+2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=3$**

(2) **$a_n=6-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=6$**

解説 (1) 漸化式を変形すると

$a_{n+1}-3=-\dfrac{1}{3}(a_n-3)$

数列 $\{a_n-3\}$ は初項が $a_1-3=2$，公比が $-\frac{1}{3}$ の等比数列である。

よって，$a_n-3=2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$a_n=3+2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=3$

(2) 漸化式を変形すると

$a_{n+1}-6=\dfrac{1}{2}(a_n-6)$

数列 $\{a_n-6\}$ は初項が $a_1-6=-5$，公比が $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

よって，$a_n-6=-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n=6-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=6$

6 **1**

解説 $S_n=2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$ より

$$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}$$
$$=\frac{S_{n+1}-S_n}{\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)-n(n+1)}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+\sqrt{n(n+1)}}$$
$$=\frac{2+\frac{2}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})=1$

P.61 **入試問題演習**

STEP 1

1 (1) **$\frac{3}{2}$** (2) **$\frac{1}{2}$** (3) **1**

(4) **$\frac{1}{8}(4b-a^2)$**

解説 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n+2}-n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3n+2)-n^2}{\sqrt{n^2+3n+2}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+1}$$
$$=\frac{3}{2}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+4^n}{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}$

$=1$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+an+b}-n-\frac{a}{2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left\{(n^2+an+b)-\left(n+\frac{a}{2}\right)^2\right\}}{\sqrt{n^2+an+b}+n+\frac{a}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-\frac{a^2}{4}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+1+\frac{a}{2n}}$$

$$=\frac{1}{8}(4b-a^2)$$

2 $\frac{1}{3}$

解説 $\lim_{n\to\infty}(3n+1)a_n=1$ を用いると

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)a_n\cdot n}{(3n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(3n+1)a_n\cdot\frac{n}{3n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(3n+1)a_n\cdot\frac{1}{3+\frac{1}{n}}$$

$$=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

3 (1) $b_n=(1-r^2)\left(\frac{r+1}{2}\right)^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

(2) $a_n=(r^2+2r+2)-4\left(\frac{r+1}{2}\right)^n$

(3) $-3<r<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}a_n=r^2+2r+2$

$r=1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}a_n=1$

解説 (1) $2a_n=(r+3)a_{n-1}-(r+1)a_{n-2}$ $(n\geqq3)$

$2(a_n-a_{n-1})=(r+1)(a_{n-1}-a_{n-2})$

$a_n-a_{n-1}=\frac{r+1}{2}(a_{n-1}-a_{n-2})$

$b_{n-1}=\frac{r+1}{2}b_{n-2}$

$b_1=a_2-a_1=1-r^2$ より，数列 $\{b_n\}$ は初項が $1-r^2$，公比が $\frac{r+1}{2}$ の等比数列をなすから

$$b_n=(1-r^2)\left(\frac{r+1}{2}\right)^{n-1}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(2) (i) $r\neq1$ のとき

$n\geqq2$ のとき，(1)の結果を用いると

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

$$=r^2+(1-r^2)\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{r+1}{2}\right)^{k-1}$$

$$=r^2+(1-r^2)\cdot\frac{1-\left(\frac{r+1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{r+1}{2}}$$

$$=(r^2+2r+2)-4\left(\frac{r+1}{2}\right)^n\quad\cdots\cdots①$$

$n=1$ とおくと，$a_1=r^2$ となって，$n=1$ のときにも①は成り立つから，①はすべての自然数について成り立つ。

(ii) $r=1$ のとき

$b_n=a_{n+1}-a_n=0$

$a_{n+1}=a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

よって，$a_n=a_1=1$ となり，①は $r=1$ のときも成り立つ。

以上より

$$a_n=(r^2+2r+2)-4\left(\frac{r+1}{2}\right)^n$$

(3) (2)より，数列 $\{a_n\}$ は，$-1<\frac{r+1}{2}\leqq1$ のときに収束する。

したがって，$-3<r\leqq1$

極限値は

(i) $-3<r<1$ のとき

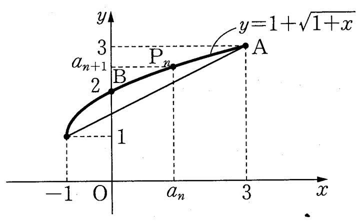
$\lim_{n\to\infty}a_n=r^2+2r+2$

(ii) $r=1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}a_n=1$

4 (1) $f(x)=1+\sqrt{1+x}$

とおくと，$y=f(x)$ のグラフは次図のようになる。



$0<x<3$ のとき，$2<f(x)<3$ である。

したがって

$0<a_n<3$ のとき，$2<f(a_n)<3$

いいかえると，$2<a_{n+1}<3$ が成り立つ。

ゆえに，$0<a_{n+1}<3$

$0<a_1<3$ を合わせ考えると，数学的帰納法により題意が成り立つ。

(2) **上の図で，線分 AP_n の傾き＜線分 AB の傾きより，$\frac{3-a_{n+1}}{3-a_n}<\frac{1}{3}$**

これと(1)より

$$0<3-a_{n+1}<\frac{1}{3}(3-a_n)$$

これをくり返し用いると，$n\geqq2$ のとき

$$0<3-a_n<\frac{1}{3}(3-a_{n-1})<\left(\frac{1}{3}\right)^2(3-a_{n-2})<\cdots$$

$$\cdots<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)$$

$n=1$ のときも含めて

$$0<3-a_n\leqq\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)\quad\cdots\cdots①$$

(3) **$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)=0$ より，①において，はさみうちの原理を使うと**

$$\lim_{n\to\infty}a_n=3$$

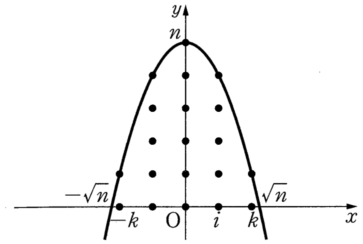
STEP2

1 (1) **20**

(2) **$a(n)=(n+1)(2k+1)-\frac{1}{3}k(k+1)(2k+1)$**

(3) $\frac{4}{3}$

解説



与えられた領域において，直線 $x=0$ 上には，格子点（x，y 座標の値がともに整数である点）は $(n+1)$ 個

直線 $x=i$ 上の格子点の y 座標は

$0\leqq y\leqq n-i^2$

であるから，直線 $x=i$ 上には格子点は $(n-i^2+1)$ 個ある。

$\sqrt{n}$ をこえない最大の整数が k だから

$$a(n)=n+1+2\sum_{i=1}^{k}(n-i^2+1)$$

(1) $a(5)=6+2\sum_{i=1}^{2}(6-i^2)=20$

(2) $a(n)$

$$=n+1+2\left\{(n+1)k-\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\right\}$$

$$=(n+1)(2k+1)-\frac{1}{3}k(k+1)(2k+1)$$

(3) $\frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2k}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{k}{\sqrt{n}}\left(\frac{k}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{2k}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$\sqrt{n}-1<k\leqq\sqrt{n}$ より，$1-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{k}{\sqrt{n}}\leqq1$

はさみうちの原理から，$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{\sqrt{n}}=1$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}=1\cdot2-\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot2=\frac{4}{3}$$

第13講 無限級数

P.63～P.64 類題

1 (1) **発散する**

(2) **収束する，和は $\frac{1}{6}$**

解説 (1) 部分和を S_n とすると

$S_n=(-1)+(-3)+(-5)+\cdots+(-2n+1)$

$=\frac{n}{2}\{-1+(-2n+1)\}$

$=-n^2$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(-n^2)=-\infty$

したがって，この無限級数は発散する。

(2) 第 n 項は

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

であるから，部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{6}$$

この級数は収束して，その和は $\frac{1}{6}$

2 (1) **収束する，和は $4-2\sqrt{2}$**

(2) **発散する**

解説 (1) 初項が 2，公比が $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ の無限等比級数で，

$-1<-\frac{1}{\sqrt{2}}<0$ より収束し，その和は

$$\frac{2}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

$$=4-2\sqrt{2}$$

(2) 初項が 1，公比が $\frac{4}{3}$ の無限等比級数で，

$\frac{4}{3}>1$ であるから，発散する。

3 $\frac{1}{10}$

解説 与えられた無限級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n+(-2)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

と表すことができる。

ここで

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\quad（収束）$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\frac{-\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=-\frac{2}{5}\quad（収束）$$

であるから，与えられた無限級数も収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n+(-2)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{10}$$

4 **xの範囲　$0<x<2$**

和　$\frac{1}{x}$

解説 与えられた無限等比級数は，初項が1，公比が$1-x$であるから，収束するための条件は

$-1<1-x<1$

$0<x<2$

また，このときの無限級数の和は

$$\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x}$$

P.65　演習問題

1 (1) **収束する，和は$\frac{1}{2}$**　(2) **発散する**

(3) **収束する，和は$\frac{2}{5}$**

解説(1) 初項から第n項までの和をS_nとすると

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

したがって，収束して，和は$\frac{1}{2}$

(2) 初項から第n項までの和をS_nとすると

$\dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$ より

$$\begin{aligned}S_n&=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})\\&\quad+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots\\&\quad+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\\&=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ より，正の無限大に発散する。

(3) $$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}\\&=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\sin\frac{3\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^5\sin\frac{5\pi}{2}\\&\quad+\left(\frac{1}{2}\right)^7\sin\frac{7\pi}{2}+\cdots\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^7}+\cdots\\&=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{2}{5}\quad\left(\begin{array}{l}-1<-\frac{1}{4}<1\text{ が}\\\text{成り立っている}\end{array}\right)\end{aligned}$$

したがって，収束し，和は$\frac{2}{5}$

2 (1) **収束する，和は$\frac{\sqrt{2}}{2}$**　(2) **発散する**

解説(1) 初項$\sqrt{2}-1$，公比$\dfrac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}-1$であるから，$0<\sqrt{2}-1<1$ より収束して，その和は

$$\frac{\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) 初項2，公比$\frac{3}{2}$で，$\frac{3}{2}>1$である。

したがって，発散する。

3 (1) **$\frac{3}{4}$**　(2) **$\frac{7}{3}$**

解説(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1\quad（収束）$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^{n+1}}=\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\quad（収束）$$

であるから，与えられた無限級数も収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}-\frac{3}{4^{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^{n+1}}$$

$$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

(2) $a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n$

であるから，(1)と同じように考えると

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n+1}{4^n}\\&=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\\&=3-1+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

4 (1) **$0<x<2$，和　1**

(2) **$0<x<1$，和　$\frac{1}{1-x}$**

解説(1) 初項がx，公比が$1-x$の無限等比級数であり，$x\neq0$であるから，収束するとき

$-1<1-x<1$

ゆえに，$0<x<2$

このとき，級数の和は

$$\frac{x}{1-(1-x)}=1$$

(2) 初項がx，公比がx^2-x+1の無限等比級数であり，$x\neq0$であるから，収束するとき

$-1<x^2-x+1<1$

すなわち，$x^2-x+2>0$ ……①

かつ　$x^2-x<0$ ……②

①は，$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ となるから，すべての実数xで成り立つ。

②は

$x(x-1)<0$

$0<x<1$

以上より，求めるxの値の範囲は

$0<x<1$

このとき，級数の和は

$$\frac{x}{1-(x^2-x+1)}=\frac{1}{1-x}$$

5 (1) **この級数の第n項は，$a_n=\dfrac{n}{2n-1}$**

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\ (\neq0)$$

したがって，無限級数は発散する。

(2) $a_n=\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ **より**

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\ (\neq0)$$

したがって，無限級数は発散する。

6 (1) **収束する，和は1**　(2) **発散する**

解説(1) 部分和をS_nとすると

$$\begin{aligned}S_n&=\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)\\&=2-\frac{n+2}{n+1}=2-\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)=1$$

したがって，収束して，和は1

(2) 部分和をS_nとする。

(i) $n=2m$ のとき

$$\begin{aligned}S_n&=S_{2m}\\&=2-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\cdots+\frac{m+1}{m}-\frac{m+2}{m+1}\\&=2-\frac{m+2}{m+1}=2-\frac{1+\frac{2}{m}}{1+\frac{1}{m}}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{m\to\infty}S_{2m}=1$$

(ii) $n=2m-1$ のとき

$$\begin{aligned}S_n&=S_{2m-1}\\&=2-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\cdots-\frac{m+1}{m}+\frac{m+1}{m}\\&=2\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=2$

(i)，(ii)より

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m}\neq\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}$$

であるから，数列$\{S_n\}$の極限はない。

したがって，無限級数は発散する。

7 (1) **$\frac{5}{9}$**　(2) **$\frac{23}{99}$**　(3) **$\frac{1741}{999}$**

解説(1) $0.\dot{5}=0.5+0.05+0.005+\cdots$

この右辺は，初項が0.5，公比が0.1の無限等比級数の和であるから

$$0.\dot{5}=\frac{0.5}{1-0.1}=\frac{5}{9}$$

(2) $0.\dot{2}\dot{3}=0.23+0.0023+0.000023+\cdots$

この右辺は，初項が0.23，公比が0.01の無限等比級数の和であるから

$$0.\dot{2}\dot{3}=\frac{0.23}{1-0.01}=\frac{23}{99}$$

(3) 同じように考えて

$1.\dot{7}4\dot{2}=1+0.742+0.000742+\cdots$

$$=1+\frac{0.742}{1-0.001}$$

$$=1+\frac{742}{999}=\frac{1741}{999}$$

P.66 入試問題演習

STEP 1

1 (1) $a_{n+1}-a_n=\{3(n+1)+2\}-(3n+2)$

$=3$

$a_1=3\cdot1+2=5$

したがって，数列$\{a_n\}$は初項が5，公差が3の等差数列である。

初項 5，公差 3

(2) $\frac{n}{5(3n+5)}$　(3) $\frac{1}{6}$

解説 (2) $b_n=\frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+5}\right)$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3n+5}\right)$$

$$=\frac{n}{5(3n+5)}$$

(3) 無限級数の部分和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{6}$$

2 $x>-\frac{1}{2}$　$S(x)=1+x$

解説 初項が1，公比$\frac{x}{1+x}$であるから，$S_n(x)$が収束する必要十分条件は

$$\left|\frac{x}{1+x}\right|<1$$

$$\frac{x^2}{(1+x)^2}<1$$

$$x^2<(1+x)^2$$

$$0<1+2x$$

$$x>-\frac{1}{2}$$

このとき

$$S(x)=\frac{1}{1-\frac{x}{1+x}}=1+x$$

3 ア $\frac{5}{6}$　イ $\frac{5}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$　ウ 8

解説 無限等比級数は，初項が1，公比が$-\frac{1}{5}$だから

$$S=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}=\frac{5}{6}$$

一方

$$S_n=\frac{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}=\frac{5}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$$

したがって

$$|S-S_n|=\left|\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right|$$

$$=\frac{1}{6\cdot5^{n-1}}<\frac{1}{10^5}$$

よって

$6\cdot5^{n-1}>10^5$

$5^{n-1}>\frac{10^5}{6}=16666.66\cdots$

$5^6=15625$，$5^7=78125$だから，$n-1\geqq7$より，最小のnは8である。

4 (1) $S_n=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

(2) $-1<x<1$のとき，収束し，和は$\frac{1}{(1-x)^2}$

$x\leqq-1$，$1\leqq x$のとき，発散する

解説 (1) $S_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$

$xS_n=\quad x+2x^2+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$

辺々をひくと，$x\neq1$より

$$(1-x)S_n=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-nx^n$$

$$=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$

$$S_n=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$$

$$=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}nx^n=0$ $(|x|<1)$であり，

$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\lim_{n\to\infty}S_n$であることから

(i) $-1<x<1$のとき

収束して，和は$\frac{1}{(1-x)^2}$

(ii) $x\leqq-1$，$1\leqq x$のとき

一般項nx^{n-1}が0に収束しないので，無限級数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$は発散する。

STEP 2

1 (1) $x_n=2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　(2) (2, 2)

(3) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

解説 (1) $x_n=f(x_{n-1})$より

$$x_n=-\frac{1}{2}x_{n-1}+3$$

$$x_n-2=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-2)\quad(n\geqq2)$$

数列$\{x_n-2\}$は，初項が$x_1-2=-1$，公比が$-\frac{1}{2}$の等比数列だから

$$x_n-2=(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$x_n=2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad(n\geqq1)$$

(2) (1)より，$\lim_{n\to\infty}x_n=2$

$f(2)=2$

より，点(2, 2)に近づく。

(3) $y=f(x)$の傾きを考えると

$$l_n=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\,|x_{n+1}-x_n|$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\left|-\frac{3}{2}x_n+3\right|$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\left|\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|$$

$$=\frac{3\sqrt{5}}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}l_n$は，初項が$\frac{3\sqrt{5}}{4}$，公比が$\frac{1}{2}$の無限等比級数だから

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

第14講 関数の極限(1)

P.68〜P.69 類題

1 (1) $-\frac{4}{3}$　(2) 0

解説 (1)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+2x+4x^2}{3-5x-3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+4}{\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x}-3}$$

$$=-\frac{4}{3}$$

(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}-x-1)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{\sqrt{x^2+2x+3}-(x+1)\}\{\sqrt{x^2+2x+3}+(x+1)\}}{\sqrt{x^2+2x+3}+(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x+3)-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}+(x+1)}=0$$

2 (1) 12　(2) 2

解説 (1)

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}(x^2-2x+4)$$

$$=12$$

(2)

$$\lim_{x\to4}\frac{1}{x-4}\left(x-\frac{16}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x+4)(x-4)}{x(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x+4}{x}=2$$

3 0

解説 $0\leqq\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqq1$より

$$0\leqq\left|x^3\cos\frac{1}{x}\right|\leqq|x^3|$$

$\lim_{x\to0}|x^3|=0$であるから

$$\lim_{x\to0}\left|x^3\cos\frac{1}{x}\right|=0$$

したがって，$\lim_{x\to0}x^3\cos\frac{1}{x}=0$

4 (1) $-\infty$　(2) 1

解説 (1) $x\to1-0$のとき，$x-1\to-0$であるから

$$\lim_{x\to1-0}\frac{3}{x-1}=-\infty$$

(2) $x>3$のとき

$|x-3|=x-3$

であるから

$$\lim_{x\to3+0}\frac{x-3}{|x-3|}=\lim_{x\to3+0}\frac{x-3}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+0}1$$
$$=1$$

5 $a=\frac{1}{3}$, $b=-3$

解説 $\lim_{x\to9}(\sqrt{x}-3)=0$ より，与えられた等式が成り立つとき

$$\lim_{x\to9}(ax+b)=0$$
$$9a+b=0$$
$$b=-9a$$

このとき，与えられた等式の左辺は

$$\lim_{x\to9}\frac{ax+b}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to9}\frac{ax-9a}{\sqrt{x}-3}$$
$$=\lim_{x\to9}a(\sqrt{x}+3)$$
$$=6a$$

となるから

$$6a=2 \qquad a=\frac{1}{3}$$

$b=-9a$ より，$b=-3$

したがって，$a=\frac{1}{3}$，$b=-3$

P.70 演習問題

1 (1) $\frac{5}{4}$ (2) ∞ (3) 0 (4) 2 (5) -1

解説(1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-x+6}{4x^2+2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}}{4+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=\frac{5}{4}$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\infty$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$$

(4) $\sqrt{x^2+2x-3}-x+1$

$$=\frac{x^2+2x-3-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+2x-3}+x-1}$$
$$=\frac{4x-4}{\sqrt{x^2+2x-3}+x-1}$$
$$=\frac{4-\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}$$

が成り立つから

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x-3}-x+1)=2$$

(5) $-x=t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+1}}{-t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)$$
$$=-1$$

2 (1) -1 (2) $\frac{3}{2}$ (3) $3a^2$ (4) $-\frac{1}{4}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) $\frac{1}{6}$ (7) 3

解説(1) $$\lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+5}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-5}{x+3}$$
$$=-1$$

(2) $$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x-2}{x-3}$$
$$=\frac{3}{2}$$

(3) $$\lim_{x\to-a}\frac{x^3+a^3}{x+a}=\lim_{x\to-a}\frac{(x+a)(x^2-ax+a^2)}{x+a}$$
$$=\lim_{x\to-a}(x^2-ax+a^2)$$
$$=3a^2$$

(4) $$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{2-(x+2)}{2(x+2)}$$
$$=\frac{-1}{2(x+2)}$$

が成り立つから

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

(5) $$\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{1-(1-x)}{x(1+\sqrt{1-x})}$$
$$=\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$$

が成り立つから

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{1}{2}$$

(6) $$\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}=\frac{x+3-9}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+3}+3}$$

が成り立つから

$$\lim_{x\to6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}=\frac{1}{6}$$

(7) $$\frac{x}{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}=\frac{x(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}{9+x-(9-x)}$$
$$=\frac{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}}{2}$$

が成り立つから

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}=3$$

3 (1) 0 (2) 0

解説(1) $0\leqq|\sin(x-1)|\leqq1$ より

$$0\leqq\left|\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right|\leqq\frac{1}{|x-1|}$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x-1|}=0$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right|=0$$

したがって

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=0$$

(2) $-1\leqq\sin x\leqq1$ より

$$-\frac{1}{x^2+1}\leqq\frac{\sin x}{x^2+1}\leqq\frac{1}{x^2+1}$$

$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)=0$，$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$ より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2+1}=0$$

4 $\lim_{x\to1-0}f(x)=2$，$\lim_{x\to1+0}f(x)=-2$

解説 $x<1$ のとき，$|1-x|=1-x$

$x>1$ のとき，$|1-x|=-(1-x)$

であるから

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{4(1-x)}{1-x^2}$$
$$=\lim_{x\to1-0}\frac{4}{1+x}=2$$
$$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{-4(1-x)}{1-x^2}$$
$$=\lim_{x\to1+0}\frac{-4}{1+x}=-2$$

5 (1) $a=-3$，$b=-2$ (2) $a=4$，$b=4\sqrt{2}$

解説(1) $\lim_{x\to2}(x^2-x-2)=0$ であるから，与えられた等式が成り立つとき

$$\lim_{x\to2}(2x^2+ax+b)=8+2a+b=0$$
$$b=-2a-8 \quad \cdots\cdots①$$

このとき

$$2x^2+ax+b$$
$$=2x^2+ax-2a-8$$
$$=(x-2)(2x+a+4)$$

よって

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2x+a+4}{x+1}$$
$$=\frac{a+8}{3}=\frac{5}{3}$$

ゆえに，$a=-3$

①に代入して，$b=-2$

(2) $\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから，与えられた等式が成り立つとき

$$\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+1}-b)=\sqrt{2}a-b=0$$
$$b=\sqrt{2}a \quad \cdots\cdots②$$
$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{a}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

よって，$a=4$

②に代入して，$b=4\sqrt{2}$

6 $a=3$，$b=5$，$c=12$

解説 $$\frac{f(x)-3x^3}{x^2}=\frac{(a-3)x^3+bx^2+cx}{x^2}$$
$$=(a-3)x+b+\frac{c}{x}$$

(ア)より，$x\to\infty$ のとき，これが5に収束することから

$$a=3,\ b=5$$

このとき

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{3x^3+5x^2+cx}{x}$$
$$=3x^2+5x+c$$

であるから，(イ)より

$$c=12$$

P.71 入試問題演習

STEP 1

1 (1) $\frac{1}{2}$ (2) -2 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{5}{2}$ (5) $-\frac{1}{2}$ (6) $\frac{9}{4}$ (7) $\frac{27}{4}$ (8) 1 (9) $\frac{1}{2}$

解説(1) $$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}}$$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}$

$=-2$

(3) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+3}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+x+3}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$

$=\frac{1}{2}$

(4) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x+7}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{5x+7}{\sqrt{x^2+5x+7}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{7}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+1}$

$=\frac{5}{2}$

(5) $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき，$t\to\infty$ であるから

与式$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3t+1}-t+1)$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-3t+1}+t-1}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}}+1-\frac{1}{t}}$

$=-\frac{1}{2}$

(6) $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき，$t\to\infty$ であるから

与式$=\lim_{t\to\infty}(-2t+\sqrt{4t^2+9t+5})$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{9t+5}{\sqrt{4t^2+9t+5}+2t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{9+\frac{5}{t}}{\sqrt{4+\frac{9}{t}+\frac{5}{t^2}}+2}$

$=\frac{9}{4}$

(7) $\frac{3x+2}{x-2}+\frac{7x-46}{x^2-4}$

$=\frac{(3x+2)(x+2)+7x-46}{x^2-4}$

$=\frac{3(x-2)(x+7)}{(x-2)(x+2)}$

$=\frac{3(x+7)}{x+2}$

よって

与式$=\lim_{x\to2}\frac{3(x+7)}{x+2}=\frac{27}{4}$

(8) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$=1$

(9) $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$

$=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$=\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{(x+2)-x}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$

が成り立つから

与式$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$

2 (1) $a=4$，$b=-5$ (2) $a=1$，$b=3$

解説 (1) $\lim_{x\to1}(x^2+x-2)=0$ であるから，与えられた等式が成り立つとき

$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$

$b=-a-1$ ……①

このとき，$x^2+ax+b=(x-1)(x+a+1)$ であるから

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+x-2}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{a+2}{3}=2$

$a=4$

①より，$b=-5$

(2) $f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+x+9}-(ax+b)}{x}$ とおくと，

$x\to0$ のとき，分母→0 だから，与えられた等式が成り立つとき

$\lim_{x\to0}\{\sqrt{2x^2+x+9}-(ax+b)\}=0$

$b=3$

このとき

$f(x)=\frac{(2-a^2)x^2+(1-6a)x}{x(\sqrt{2x^2+x+9}+ax+3)}$

$=\frac{(2-a^2)x+1-6a}{\sqrt{2x^2+x+9}+ax+3}$

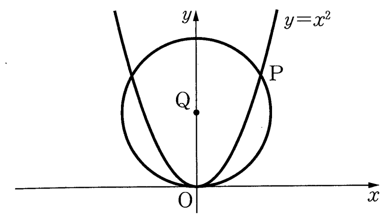
であるから

$\lim_{x\to0}f(x)=\frac{1-6a}{6}=-\frac{5}{6}$

ゆえに，$a=1$

3 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$

解説



点P，Qの座標をそれぞれ$(\alpha,\ \alpha^2)$，$(0,\ r)$とすると，円の方程式は

$x^2+(y-r)^2=r^2$

これが点P$(\alpha,\ \alpha^2)$を通るから

$\alpha^2+(\alpha^2-r)^2=r^2$

$\alpha^2(\alpha^2+1-2r)=0$

$\alpha\neq0$ だから，$r=\frac{\alpha^2+1}{2}$

点Pが限りなく原点に近づくとき

$\lim_{\alpha\to0}r=\lim_{\alpha\to0}\frac{\alpha^2+1}{2}=\frac{1}{2}$

よって，点Qは点$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$に近づく。

STEP 2

1 $a=2$，$b=4$，$c=2$

解説 $\lim_{x\to-1}(x^3+1)=0$ より，条件(ア)が成り立つとき

$\lim_{x\to-1}f(x)=-1+(2a-1)-b+c=0$

である。

よって，$c=-2a+b+2$ ……①

このとき

$f(x)=x^3+(2a-1)x^2+bx-(2a-b-2)$

$=(x+1)\{x^2+2(a-1)x-(2a-b-2)\}$

であるから

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^3+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+2(a-1)x-(2a-b-2)}{x^2-x+1}$

$=\frac{-4a+b+5}{3}=\frac{1}{3}$

ゆえに，$b=4a-4$ ……②

また，$x^2+2(a-1)x-(2a-b-2)=0$ は虚数解をもつから，判別式をDとすると

$\frac{D}{4}=(a-1)^2+(2a-b-2)<0$

②を代入すると

$a^2-4a+3<0$ $1<a<3$

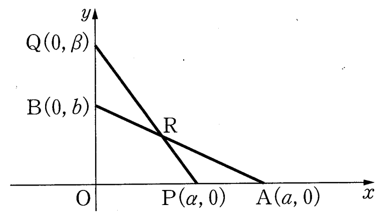
aは整数だから，$a=2$

②より，$b=4$

①より，$c=2$

2 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$

解説



点P，Qの座標をそれぞれ$(\alpha,\ 0)$，$(0,\ \beta)$とおくと，△OPQ=△OABより

$\alpha\beta=ab$

が成り立つ。

ただし，$0<\alpha<a$，$0<b<\beta$ である。

直線ABの方程式は

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$bx+ay=ab$ ……①

直線PQの方程式は

$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$

$\beta x+\alpha y=\alpha\beta$ ……②

①と②は平行ではないので

$a\beta-b\alpha\neq0$

であり，点Rのx座標Xは，①，②よりyを消去して

$X=\frac{a\alpha(\beta-b)}{a\beta-b\alpha}$

$\beta=\frac{ab}{\alpha}$ を代入して整理すると，$X=\frac{a\alpha}{a+\alpha}$

P→Aのとき，$\alpha\to a$ となるから

$\lim_{\alpha\to a}X=\lim_{\alpha\to a}\frac{a\alpha}{a+\alpha}=\frac{a}{2}$

点Rは直線AB上の点だから，このときy座標Yは$Y\to\frac{b}{2}$となり，点Rは限りなく$\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$に近づく。

第15講　関数の極限(2)

P.73〜P.74　類題

1　(1) **1**　(2) **−∞**

解説 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4^x+3^x}{4^x-3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^x}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x}=1$

(2) $x\to\infty$ のとき，$\dfrac{1}{x+1}\to+0$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{1}{x+1}=-\infty$$

2　(1) $\boldsymbol{\frac{2}{5}}$　(2) $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$　(3) **−1**　(4) **1**

解説 (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{\sin5x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin2x}{\cos2x}}{\sin5x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin2x}{2x}\cdot2}{\frac{\sin5x}{5x}\cdot5}\cdot\frac{1}{\cos2x}$$

$$=\frac{2}{5}\cdot1=\frac{2}{5}$$

(2) $\displaystyle\frac{x^2}{1-\cos2x}=\frac{x^2(1+\cos2x)}{(1-\cos2x)(1+\cos2x)}$

$$=\frac{x^2(1+\cos2x)}{\sin^2 2x}$$

$$=\frac{(2x)^2(1+\cos2x)}{4\sin^2 2x}$$

であるから

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{\sin2x}\right)^2(1+\cos2x)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot1\cdot2$$

$$=\frac{1}{2}$$

(3) $x-\pi=\theta$ とおくと

$x\to\pi$ のとき，$\theta\to0$

となるから

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin(\pi+\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{-\sin\theta}{\theta}$$

$$=-1$$

(4) $x\to\infty$ のとき，$\dfrac{1}{x}\to0$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\tan\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}}{x\sin\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}$$

$$=1\cdot1$$

$$=1$$

3　**1**

解説 $\mathrm{OH}=a\cos\theta$，$\mathrm{BH}=a\sin\theta$ より

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OH}\cdot\mathrm{BH}$$

$$=\frac{a^2}{2}\sin\theta\cos\theta$$

一方

$$T=\frac{a^2\theta}{2}$$

であるから

$$\lim_{\theta\to0}\frac{T}{S}=\lim_{\theta\to0}\frac{\frac{a^2\theta}{2}}{\frac{a^2}{2}\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=1\cdot1=1$$

P.75　演習問題

1　(1) **∞**　(2) **1**　(3) **−1**

解説 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2^x+2^{-x})=\lim_{x\to\infty}\left\{2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}$

$$=\infty$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4^x-4^{-x}}{4^x+4^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{16}\right)^x}$

$$=1$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3^{2x}-6}{2^x+4}=\frac{1-6}{1+4}$

$$=-1$$

2　(1) **0**　(2) $\boldsymbol{\frac{3}{2}}$　(3) **1**　(4) **−∞**

解説 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{x+5}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{3}{x}}$

$$=\log_2 1$$

$$=0$$

(2) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to6}\log_4\frac{x^2-4}{x-2}$

$$=\lim_{x\to6}\log_4(x+2)$$

$$=\log_4 8=\frac{3}{2}$$

(3) $x>0$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}(\log_2\sqrt{4x^2+3}-\log_2 x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{\sqrt{4x^2+3}}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_2\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}$$

$$=\log_2\sqrt{4}=1$$

(4) $x\to0$ のとき，$1-\cos^2x\to+0$ だから

$$\lim_{x\to0}\log_{10}(1-\cos^2x)=-\infty$$

3　(1) **3**　(2) $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$　(3) $\boldsymbol{\frac{9}{2}}$　(4) $\boldsymbol{\frac{\pi}{180}}$　(5) $\boldsymbol{-\pi}$　(6) $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

解説 (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}=\lim_{x\to0}3\cdot\frac{\sin3x}{3x}$

$$=3$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos3x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{9}{1+\cos3x}$$

$$=\frac{9}{2}$$

(4) $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ だから，$x^\circ=\dfrac{\pi}{180}x$

よって

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x^\circ}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan\frac{\pi}{180}x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\cos\frac{\pi}{180}x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{180}x}$$

$$=\frac{\pi}{180}$$

(5) $x-3=\theta$ とおくと

$$\lim_{x\to3}\frac{\sin\pi x}{x-3}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\pi(\theta+3)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{-\sin\pi\theta}{\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to0}\left(-\pi\cdot\frac{\sin\pi\theta}{\pi\theta}\right)$$

$$=-\pi$$

(6) $\displaystyle\tan x-\sin x=\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)$

$$=\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}$$

$$=\frac{\sin^3x}{\cos x(1+\cos x)}$$

だから

$$与式=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$$

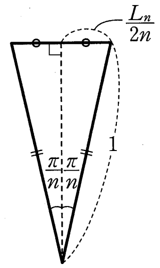
$$=\frac{1}{2}$$

4　(1) $\boldsymbol{L_n=2n\sin\frac{\pi}{n}}$，$\boldsymbol{S_n=\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}}$

(2) $\boldsymbol{2\pi}$

(3) $\boldsymbol{\pi}$

解説 (1) 円の中心から正 n 角形の各頂点に線分をひいて，正 n 角形を n 個の三角形に分割すると，1つの三角形は次の図のようになる。



よって

$$\frac{L_n}{2n}=\sin\frac{\pi}{n}$$

$$L_n=2n\sin\frac{\pi}{n}$$

また，この三角形の面積を考えて

$$\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$S_n=\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

(2) $\frac{\pi}{n}=\theta$ とおくと

$n\to\infty$ のとき，$\theta\to 0$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}2n\sin\frac{\pi}{n}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\pi}{\theta}\cdot\sin\theta$$
$$=\lim_{\theta\to 0}2\pi\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}$$
$$=2\pi$$

(3) $\frac{\pi}{n}=\theta$ とおくと，(2)と同様にして

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\pi}{2\theta}\cdot\sin 2\theta$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\pi\cdot\frac{\sin 2\theta}{2\theta}$$
$$=\pi$$

5 **(0, 0)**

解説　$\mathrm{P}(\theta,\ \cos\theta)\left(\theta\neq 0,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ としてよい。

線分APの中点の座標は

$$\left(\frac{\theta}{2},\ \frac{1+\cos\theta}{2}\right)$$

直線APの傾きは

$$\frac{\cos\theta-1}{\theta-0}=\frac{\cos\theta-1}{\theta}$$

であるから，線分APの垂直二等分線の方程式は

$$y-\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{\theta}{1-\cos\theta}\left(x-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$y=\frac{\theta}{1-\cos\theta}x-\frac{\theta^2}{2(1-\cos\theta)}+\frac{1+\cos\theta}{2}$$

よって，Qの座標は

$$\mathrm{Q}\left(0,\ -\frac{\theta^2}{2(1-\cos\theta)}+\frac{1+\cos\theta}{2}\right)$$

ここで，Qの y 座標は

$$-\frac{\theta^2}{2(1-\cos\theta)}+\frac{1+\cos\theta}{2}$$
$$=-\frac{\theta^2(1+\cos\theta)}{2\sin^2\theta}+\frac{1+\cos\theta}{2}$$
$$=-\frac{1+\cos\theta}{2}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2+\frac{1+\cos\theta}{2}$$

とできるから

$$\lim_{\theta\to 0}\left\{-\frac{\theta^2}{2(1-\cos\theta)}+\frac{1+\cos\theta}{2}\right\}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\left\{-\frac{1+\cos\theta}{2}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2+\frac{1+\cos\theta}{2}\right\}$$
$$=-\frac{2}{2}\cdot 1+\frac{2}{2}$$
$$=0$$

したがって，点Qが近づく点の座標は

(0, 0)

P.76　入試問題演習

STEP 1

1 (1) **−1**

(2) $\lim_{x\to\infty}f(x)=1,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

(3) $\lim_{x\to\infty}f(x)=-2,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=4$

解説 (1) 与式$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+1}=-1$

(2) $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}=1$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^x}=0$$

(3) $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4\left(\frac{2}{3}\right)^x+2}{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}=-2$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4+2\left(\frac{3}{2}\right)^x}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^x}=4$$

2 (1) $\frac{3}{25}$　(2) $2\sqrt{2}$　(3) **−1**

(4) **4**　(5) **−6**

解説 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 5x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5x}{\sin 5x}\right)^2\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{25}$$
$$=\frac{3}{25}$$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$

$$=\lim_{x\to 0}(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})\frac{\tan 2x}{2x}$$
$$=2\sqrt{2}$$

(3) $\pi-x=\theta$ とおくと

$x\to\pi$ のとき，$\theta\to 0$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\sin x}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-\theta}{\sin(\pi-\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\left(-\frac{\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$=-1$$

(4) 3倍角の公式

$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ より

$$\cos x-\cos 3x=4\cos x(1-\cos^2 x)$$
$$=4\cos x\sin^2 x$$

よって，与式$=\lim_{x\to 0}4\cos x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

$$=4$$

(5) 3倍角の公式

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$$

を利用すると

$$\frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\sin x}-1}$$
$$=\frac{(3\sin x-4\sin^3 x)(\sqrt{1-\sin x}+1)}{-\sin x}$$
$$=(4\sin^2 x-3)(\sqrt{1-\sin x}+1)$$

したがって

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\sin x}-1}=-6$$

3 ア **0**　イ $\frac{1}{2}$

解説　$\tan x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x$

$$=\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}$$
$$=\frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos x(1+\cos x)}$$
$$=\frac{\sin^3 x}{\cos x(1+\cos x)}$$

であるから

$$\frac{ax^2+bx^3}{\tan x-\sin x}$$
$$=\frac{(ax^2+bx^3)\cos x(1+\cos x)}{\sin^3 x}$$
$$=\frac{\left(\frac{a}{x}+b\right)\cos x(1+\cos x)}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3}=A$$

とおく。

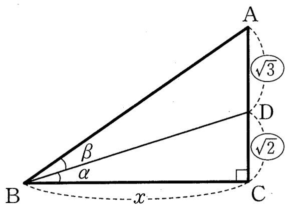
$a\neq 0$ のとき，$\lim_{x\to 0}\frac{a}{x}$ は正の無限大または負の無限大に発散するから，$\lim_{x\to 0}A$ が収束するためには，$a=0$ でなければならない。

このとき，$\lim_{x\to 0}A=2b=1$

$$b=\frac{1}{2}$$

4 (1) $\frac{(3+\sqrt{6})x^2}{(2+\sqrt{6})x^2+2}$　(2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

解説



(1) $\tan\alpha=\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BC}}$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$\tan\beta$

$$=\tan(B-\alpha)$$
$$=\frac{\tan B-\tan\alpha}{1+\tan B\tan\alpha}$$
$$=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})x-\sqrt{2}x}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})x^2+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}x}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})x^2+\sqrt{2}}$$

したがって

$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$$
$$=\frac{\sqrt{3}x}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})x^2+\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})x}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{(3+\sqrt{6})x^2}{(2+\sqrt{6})x^2+2}$$

(2) $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$

$$=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$
$$=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\frac{\frac{\sin\beta}{\beta}}{\frac{\sin\alpha}{\alpha}}\cdot\frac{\beta}{\alpha}$$

よって

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\cdot\frac{\frac{\sin\alpha}{\alpha}}{\frac{\sin\beta}{\beta}}\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$$

が成り立ち，$x\to\infty$ のとき，α，$\beta\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\beta}{\alpha}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\cdot\frac{\frac{\sin\alpha}{\alpha}}{\frac{\sin\beta}{\beta}}\cdot\frac{(3+\sqrt{6})x^2}{(2+\sqrt{6})x^2+2}$$

$$=1\cdot1\cdot\frac{3+\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

STEP 2

1 (1) $\boldsymbol{S_1=\frac{1}{2}a^2(\tan\theta-\sin\theta)}$

(2) $\boldsymbol{S(\theta)=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\tan\theta}{1+\cos\theta}}$

(3) $\boldsymbol{\frac{a^2}{4}}$

解説 (1) $S_1=\triangle OA_0P_0-\triangle OA_0P_1$

$$=\frac{1}{2}a^2\tan\theta-\frac{1}{2}a^2\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^2(\tan\theta-\sin\theta)$$

(2) $OA_0=a$, $OA_n=OA_{n-1}\cos\theta$
($n=1$, 2, 3, …) より
$OA_n=a\cos^n\theta$
よって，(1)と同様にして

$$S_n=\frac{1}{2}(OA_{n-1})^2(\tan\theta-\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{2}a^2(\tan\theta-\sin\theta)\cos^{2n-2}\theta$$

したがって，$S(\theta)$ は，初項が S_1，公比が $\cos^2\theta$ の無限等比級数であり，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より，$0<\cos^2\theta<1$ であるから

$$S(\theta)=\frac{1}{2}a^2(\tan\theta-\sin\theta)\cdot\frac{1}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\cos\theta(1-\cos^2\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\tan\theta}{1+\cos\theta}$$

(3) $$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{2}a^2\cdot1\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{a^2}{4}$$

第16講 微分法

P.78～P.79 **類題**

1 $$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{x+h+2}-\sqrt{x+2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{x+h+2-(x+2)}{\sqrt{x+h+2}+\sqrt{x+2}}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{h}{\sqrt{x+h+2}+\sqrt{x+2}}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{x+h+2}+\sqrt{x+2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

2 (1) $\boldsymbol{-\frac{7}{(x-3)^2}}$ (2) $\boldsymbol{20x(2x^2-3)^4}$

(3) $\boldsymbol{\frac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x-7)^2}}}$

解説 (1) $y'=\frac{2(x-3)-(2x+1)}{(x-3)^2}=-\frac{7}{(x-3)^2}$

(別解)

$y=\frac{2(x-3)+7}{x-3}=2+\frac{7}{x-3}$ より

$$y'=-\frac{7}{(x-3)^2}$$

(2) $y'=5(2x^2-3)^4\cdot4x$
$=20x(2x^2-3)^4$

(3) $y=(x^2+2x-7)^{\frac{1}{3}}$ であるから

$$y'=\frac{1}{3}(x^2+2x-7)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x+2)$$

$$=\frac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x-7)^2}}$$

3 (1) $\boldsymbol{-a+b=1}$ (2) $\boldsymbol{a=3,\ b=4}$

解説 (1) $\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}(2x+3)=1$

$\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1-0}\frac{ax+b}{x+2}=-a+b$

$f(x)$ は $x=-1$ で連続であるから
$-a+b=1$ ……①

(2) $x=-1$ で微分可能であるとき，$f(x)$ は連続であるから，①が成り立つ。
また

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

$$=\lim_{x\to-1+0}\frac{(2x+3)-1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1+0}\frac{2(x+1)}{x+1}=2$$

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

$$=\lim_{x\to-1-0}\frac{1}{x+1}\left\{\frac{ax+b}{x+2}-(-a+b)\right\}$$

$$=\lim_{x\to-1-0}\frac{(ax+b)-(x+2)(-a+b)}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to-1-0}\frac{(2a-b)x+2a-b}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to-1-0}\frac{(2a-b)(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to-1-0}\frac{2a-b}{x+2}$$

$=2a-b$

微分可能であるとき

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

$$=\lim_{x\to-1-0}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

となるから，$2a-b=2$ ……②

①，②より，$a=3$，$b=4$

4 **$f(x)=3^x+x-5$ とおくと，$f(x)$ は区間$[-1,\ 2]$で連続であり**

$$\boldsymbol{f(-1)=\frac{1}{3}-1-5=-\frac{17}{3}<0}$$

$$\boldsymbol{f(2)=9+2-5=6>0}$$

したがって，中間値の定理より，方程式 $f(x)=0$ は，区間$(-1,\ 2)$に少なくとも1つの実数解をもつ。

P.80 **演習問題**

1 (1) $$\boldsymbol{y'=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}\right\}}$$

$$\boldsymbol{=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}$$

$$\boldsymbol{=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2}}$$

$$\boldsymbol{=\lim_{h\to0}\frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2}}$$

$$\boldsymbol{=\frac{-2x}{x^4}}$$

$$\boldsymbol{=-\frac{2}{x^3}}$$

(2) $$\boldsymbol{y'=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}}$$

$$\boldsymbol{=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(x+h)-x}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}}$$

$$\boldsymbol{=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}}$$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

解説 「定義にしたがって」という指示があるので，

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ にあてはめて計算する。(1)は通分をし，(2)では分子の有理化をして h を約分する。

結果が正しいかどうかを，公式を用いて計算した式と比較して，検算しておきたい。

2 (1) **15** (2) **5**

解説 (1) 与式

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2+2h)-f(2)\}-\{f(2-3h)-f(2)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(2+2h)-f(2)}{2h}\times2-\frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h}\times(-3)\right\}$$

$=f'(2)\times2-f'(2)\times(-3)$
$=5f'(2)$
$=15$

(2) 与式

$$=\lim_{x\to2}\frac{\{2f(x)-2f(2)\}-\{xf(2)-2f(2)\}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\left\{2\times\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-f(2)\right\}$$

$=2f'(2)-f(2)$
$=5$

3 (1) $\boldsymbol{y'=3x^2(x-1)^2(2x-1)}$

(2) $\boldsymbol{y'=\frac{2x^5-x^2+3}{x^4}}$

(3) $\boldsymbol{y'=\frac{-3x^2+2x+3}{(x^2+1)^2}}$

(4) $\boldsymbol{y'=\frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}}$ (5) $\boldsymbol{y'=\frac{3x+5}{2\sqrt{x+1}}}$

(6) $\boldsymbol{y'=\frac{2x-1}{4\sqrt[4]{(x^2-x+3)^3}}}$

解説 (1) $y'=3x^2(x-1)^3+x^3\cdot3(x-1)^2$
$=3x^2(x-1)^2\{(x-1)+x\}$
$=3x^2(x-1)^2(2x-1)$

(2) $y=x^2-4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}$
$=x^2-4+x^{-1}-x^{-3}$
よって
$y'=2x-x^{-2}+3x^{-4}$

$$=2x-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}$$

$$=\frac{2x^5-x^2+3}{x^4}$$

(別解)

与えられた形のままで商の導関数の公式をあてはめれば

$$y'=\frac{(5x^4-12x^2+2x)x^3-3x^2(x^5-4x^3+x^2-1)}{x^6}$$

$$=\frac{2x^7-x^4+3x^2}{x^6}$$

$$=\frac{2x^5-x^2+3}{x^4}$$

(3) $y'=\dfrac{3(x^2+1)-2x(3x-1)}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-3x^2+2x+3}{(x^2+1)^2}$

(4) $y'=\dfrac{1}{(\sqrt{x-1})^2}\left(\sqrt{x-1}-\dfrac{x}{2\sqrt{x-1}}\right)$

$=\dfrac{1}{x-1}\cdot\dfrac{2(x-1)-x}{2\sqrt{x-1}}$

$=\dfrac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

(参考)

$y=x\cdot(x-1)^{-\frac{1}{2}}$

と変形し，積の導関数の公式を用いてもよい。

(5) $y'=\sqrt{x+1}+(x+3)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$=\dfrac{2(x+1)+(x+3)}{2\sqrt{x+1}}$

$=\dfrac{3x+5}{2\sqrt{x+1}}$

(6) $y=(x^2-x+3)^{\frac{1}{4}}$ より

$y'=\dfrac{1}{4}(x^2-x+3)^{-\frac{3}{4}}\cdot(2x-1)$

$=\dfrac{2x-1}{4\sqrt[4]{(x^2-x+3)^3}}$

4 $\boldsymbol{a=6,\ b=-2}$

解説 $\displaystyle\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{ax+b}{x+1}=\frac{a+b}{2}$

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}(x^2+1)=2$

$f(x)$ は $x=1$ で連続であるから

$\dfrac{a+b}{2}=2$ より，$a+b=4$ ……①

$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}\left(\frac{ax+b}{x+1}-\frac{a+b}{2}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to1+0}\frac{2(ax+b)-(a+b)(x+1)}{2(x-1)(x+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1+0}\frac{(a-b)x-a+b}{2(x-1)(x+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1+0}\frac{(a-b)(x-1)}{2(x-1)(x+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1+0}\frac{a-b}{2(x+1)}$

$=\dfrac{a-b}{4}$

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{(x^2+1)-2}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1-0}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1-0}(x+1)=2$

$f(x)$ は $x=1$ で微分可能であるから

$\dfrac{a-b}{4}=2$ より，$a-b=8$ ……②

①，②より，$a=6$，$b=-2$

5 (1) $\boldsymbol{f(x)=x-\cos x}$ **は区間** $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ **で連続であり**

$\boldsymbol{f(0)=-1<0,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}>0}$

であるから，中間値の定理より，$f(c)=0$，

$0<c<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす c が存在する。

すなわち，方程式 $x-\cos x=0$ は，区間

$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に少なくとも1つの実数解をもつ。

(2) **$f(x)=x^3+x^2-x-8$ は，区間 $[0,\ 2]$ で連続である。**

$\boldsymbol{f(0)=-8<0}$

$\boldsymbol{f(2)=8+4-2-8=2>0}$

であるから，中間値の定理より，$f(c)=0$，

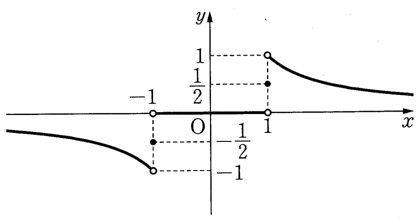
$0<c<2$ を満たす c が存在する。

すなわち，方程式 $x^3+x^2-x-8=0$ は区間

$(0,\ 2)$ に少なくとも1つの実数解をもつ。

6 (1)
$$f(x)=\begin{cases}0 & (-1<x<1)\\[4pt] \dfrac{1}{2} & (x=1)\\[4pt] -\dfrac{1}{2} & (x=-1)\\[4pt] \dfrac{1}{x} & (|x|>1)\end{cases}$$

(2)



(3) **$x=\pm1$ で不連続，それ以外で連続**

解説 (1) (i) $-1<x<1$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=0$ であるから

$f(x)=0$

(ii) $x=1$ のとき

$f_n(1)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ であるから

$f(x)=\dfrac{1}{2}$

(iii) $x=-1$ のとき

$f_n(-1)=\dfrac{-1}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$ であるから

$f(x)=-\dfrac{1}{2}$

(iv) $|x|>1$ のとき

$f_n(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}+1}$ であり，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}=0$ であるから

$f(x)=\dfrac{1}{x}$

(2) (1)で求めた $y=f(x)$ を用いると，グラフは解答のようになる。

(3) (2)のグラフより，$x=\pm1$ で不連続，それ以外で連続である。

P.81 **入試問題演習**

STEP 1

1 $\boldsymbol{y'}$

$\displaystyle\boldsymbol{=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+\sqrt{2-x-h}}-\frac{1}{x+\sqrt{2-x}}\right)}$

$\displaystyle\boldsymbol{=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(x+\sqrt{2-x})-(x+h+\sqrt{2-x-h})}{(x+h+\sqrt{2-x-h})(x+\sqrt{2-x})}}$

$\displaystyle\boldsymbol{=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{2-x-h})-h}{(x+h+\sqrt{2-x-h})(x+\sqrt{2-x})}}$

$\displaystyle\boldsymbol{=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{(2-x)-(2-x-h)}{(x+h+\sqrt{2-x-h})(x+\sqrt{2-x})(\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x-h})}\right.}$

$\displaystyle\boldsymbol{\left.-\frac{h}{(x+h+\sqrt{2-x-h})(x+\sqrt{2-x})}\right\}}$

$\displaystyle\boldsymbol{=\lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{(x+h+\sqrt{2-x-h})(x+\sqrt{2-x})(\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x-h})}\right.}$

$\displaystyle\boldsymbol{\left.-\frac{1}{(x+h+\sqrt{2-x-h})(x+\sqrt{2-x})}\right\}}$

$\displaystyle\boldsymbol{=\frac{1}{(x+\sqrt{2-x})^2\cdot2\sqrt{2-x}}-\frac{1}{(x+\sqrt{2-x})^2}}$

$\displaystyle\boldsymbol{=\frac{1-2\sqrt{2-x}}{2\sqrt{2-x}(x+\sqrt{2-x})^2}}$

解説 定義通りに極限値の計算をする。$\sqrt{\ }$ を含む式の極限値が0になるときは，その部分を有理化して約分する。

2 (1) $\boldsymbol{y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}}$ (2) $\boldsymbol{y'=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}}$

(3) $\boldsymbol{y'=\dfrac{2x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}}$

(4) $\boldsymbol{y'=-\dfrac{1}{2(1+\sqrt{x})\sqrt{(1-x)x}}}$

解説 (1) $y'=\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

(別解)

$y=\dfrac{x-1+2}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$ より $y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

(2) $y=(1-2x)^{\frac{1}{3}}$ より

$y'=\dfrac{1}{3}(1-2x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-2)$

$=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$

(3) $y'=\sqrt{x^2+a^2}+x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}$

$=\dfrac{(x^2+a^2)+x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$=\dfrac{2x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$

(4) $y=\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}}$ より

$y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

$\times\dfrac{(1-\sqrt{x})'(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}\cdot\dfrac{-\frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

$=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})x}}$

$=-\dfrac{1}{2(1+\sqrt{x})\sqrt{(1-x)x}}$

3 $\boldsymbol{\alpha=2,\ \beta=4}$

解説 $\displaystyle\lim_{x\to2+0}f(x)=\lim_{x\to2+0}(x^3+\alpha x)=8+2\alpha$

$\displaystyle\lim_{x\to2-0}f(x)=\lim_{x\to2-0}(\beta x^2-\alpha x)=4\beta-2\alpha$

$f(x)$ は $x=2$ で連続であるから

$8+2\alpha=4\beta-2\alpha$

$\alpha-\beta=-2$ ……①

$\displaystyle\lim_{x\to2+0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2+0}\frac{(x^3+\alpha x)-(8+2\alpha)}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2+0}\frac{\alpha(x-2)+(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2+0}(\alpha+x^2+2x+4)$

$=\alpha+12$

$\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2-0}\cdot\frac{(\beta x^2-\alpha x)-(4\beta-2\alpha)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2-0}\frac{\beta(x^2-4)-\alpha(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2-0}\frac{\beta(x+2)(x-2)-\alpha(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2-0}\{\beta(x+2)-\alpha\}$$

$$=4\beta-\alpha$$

微分可能であるとき

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

となるから

$$\alpha+12=4\beta-\alpha$$

$$\alpha-2\beta=-6 \quad \cdots\cdots ②$$

①，②を解いて，$\alpha=2$，$\beta=4$

4 2π

解説 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{f(1-\cos 2\theta)}{\theta^2}$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{f(2\sin^2\theta)}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{f(2\sin^2\theta)}{2\sin^2\theta}\cdot\frac{2\sin^2\theta}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{f(2\sin^2\theta)}{2\sin^2\theta}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot 2$$

ここで，$\theta\to 0$ のとき $2\sin^2\theta\to 0$ であり，$f(0)=0$ であるから

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{f(2\sin^2\theta)}{2\sin^2\theta}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot 2$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{f(2\sin^2\theta)-f(0)}{2\sin^2\theta-0}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot 2$$

$$=f'(0)\cdot 1\cdot 2$$

$$=2\pi$$

STEP 2

1 (1) **-3** (2) **4**

解説 (1) $f(-x)=f(x)+2x$

この式の両辺を微分して

$$-f'(-x)=f'(x)+2$$

$$-f'(-1)=f'(1)+2=3$$

よって，$f'(-1)=-3$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+f(-x)-2}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+\{f(x)+2x\}-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)+2(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{2\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+2\right\}$$

$$=2f'(1)+2$$

$$=4$$

第17講　いろいろな関数の導関数(1)

P.83〜P.84　類題

1 (1) $\boldsymbol{-3\sin 3x}$ (2) $\boldsymbol{\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}}$

(3) $\boldsymbol{2x\cos x-x^2\sin x}$ (4) $\boldsymbol{-\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}}$

解説 (1) $y'=-\sin 3x\cdot(3x)'=-3\sin 3x$

(2) $y'=2\tan x\cdot(\tan x)'$

$$=2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{2\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

(3) $y'=(x^2)'\cdot\cos x+x^2\cdot(\cos x)'$

$$=2x\cos x-x^2\sin x$$

(4) $y'=\dfrac{(1+\cos^2 x)'}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}$

$$=\frac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$=-\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

2 (1) $\boldsymbol{\dfrac{2x}{2x^2-3}}$ (2) $\boldsymbol{e^{2x}(2\cos x-\sin x)}$

(3) $\boldsymbol{\dfrac{1}{2^x}\left(\dfrac{1}{x\log 2}-\log x\right)}$

解説 (1) $y'=\dfrac{(\sqrt{2x^2-3})'}{\sqrt{2x^2-3}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x^2-3}}\cdot\frac{4x}{2\sqrt{2x^2-3}}$$

$$=\frac{2x}{2x^2-3}$$

(2) $y'=(e^{2x})'\cdot\cos x+e^{2x}\cdot(\cos x)'$

$$=e^{2x}\cdot(2x)'\cdot\cos x+e^{2x}\cdot(-\sin x)$$

$$=2e^{2x}\cos x-e^{2x}\sin x$$

$$=e^{2x}(2\cos x-\sin x)$$

(3) $y'=\dfrac{(\log_2 x)'\cdot 2^x-\log_2 x\cdot(2^x)'}{(2^x)^2}$

$$=\frac{\dfrac{1}{x\log 2}\cdot 2^x-\log_2 x\cdot 2^x\log 2}{2^{2x}}$$

$$=\frac{1}{2^x}\left(\frac{1}{x\log 2}-\log_2 x\cdot\log 2\right)$$

$$=\frac{1}{2^x}\left(\frac{1}{x\log 2}-\frac{\log x}{\log 2}\cdot\log 2\right)$$

$$=\frac{1}{2^x}\left(\frac{1}{x\log 2}-\log x\right)$$

3 (1) **0** (2) **-2**

解説 (1) $f(x)=e^x$，$g(x)=e^{-x}$ とおくと

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)+(e^{-x}-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right\}$$

$$=f'(0)+g'(0)$$

$f'(x)=e^x$，$g'(x)=-e^{-x}$ であるから，求める極限値は，$1-1=0$

(2) $f(x)=\log x^2$ とおくと

$$\lim_{x\to -1}\frac{\log x^2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\log x^2-\log(-1)^2}{x-(-1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

$$=f'(-1)$$

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2}=\dfrac{2}{x}$ であるから，求める極限値は，-2

4 (1) $\boldsymbol{x^{x^2+1}(2\log x+1)}$ (2) $\boldsymbol{\dfrac{9x^2-24x+1}{2(x-2)\sqrt{x-2}}}$

解説 (1) $y=x^{x^2}$ の両辺の自然対数をとって

$$\log y=\log x^{x^2}$$

よって，$\log y=x^2\log x$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y}=2x\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}$$

よって，$y'=y(2x\log x+x)$

$$=x^{x^2}(2x\log x+x)$$

$$=x^{x^2+1}(2\log x+1)$$

(2) $y=\dfrac{3x^2-1}{\sqrt{x-2}}$ の両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y|=\log\left|\frac{3x^2-1}{\sqrt{x-2}}\right|$$

$$=\log|3x^2-1|-\frac{1}{2}\log|x-2|$$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y}=\frac{6x}{3x^2-1}-\frac{1}{2(x-2)}$$

$$=\frac{12x(x-2)-(3x^2-1)}{2(3x^2-1)(x-2)}$$

$$=\frac{9x^2-24x+1}{2(3x^2-1)(x-2)}$$

よって

$$y'=\frac{3x^2-1}{\sqrt{x-2}}\cdot\frac{9x^2-24x+1}{2(3x^2-1)(x-2)}$$

$$=\frac{9x^2-24x+1}{2(x-2)\sqrt{x-2}}$$

P.85　演習問題

1 (1) $\boldsymbol{y'=2\cos 2x\cos 3x-3\sin 2x\sin 3x}$

(2) $\boldsymbol{y'=3\sin^2 x\cos x}$

(3) $\boldsymbol{y'=2x\cos x^2}$

(4) $\boldsymbol{y'=\dfrac{6\sin 3x}{\cos^3 3x}}$ (5) $\boldsymbol{y'=\dfrac{1}{1+\cos x}}$

(6) $\boldsymbol{y'=\dfrac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}}$ (7) $\boldsymbol{y'=-\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos 2x}}}$

(8) $\boldsymbol{y'=-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)}$

解説 (1) $y'=(\sin 2x)'\cdot\cos 3x+\sin 2x\cdot(\cos 3x)'$

$$=2\cos 2x\cos 3x-3\sin 2x\sin 3x$$

(2) $y'=3\sin^2 x\cdot(\sin x)'$

$$=3\sin^2 x\cos x$$

(3) $y'=\cos x^2\cdot(x^2)'$

$$=2x\cos x^2$$

(4) $y'=2\tan 3x\cdot(\tan 3x)'$

$$=2\tan 3x\cdot\frac{3}{\cos^2 3x}$$

$$=\frac{6\sin 3x}{\cos^3 3x}$$

(5) $y'=\dfrac{\cos x\cdot(1+\cos x)-\sin x\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$$=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{1}{1+\cos x}$$

(6) $y'=\dfrac{1}{\cos^2(\sin x)}\cdot(\sin x)'$

$$=\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$$

(7) $y'=\dfrac{(1+\cos 2x)'}{2\sqrt{1+\cos 2x}}$

$$=\frac{-2\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos 2x}}$$

$$=-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos 2x}}$$

(8) $y'=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)\cdot\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)'$

$$=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$$

2 (1) $\boldsymbol{y'=\dfrac{1}{x}}$

(2) $\boldsymbol{y'=e^{2x}\left(2x+2\log x+1+\dfrac{1}{x}\right)}$

(3) $\boldsymbol{y'=(-3x^2+2x-9)e^{-3x}}$

(4) $\boldsymbol{y'=-2xe^{-x^2}}$ (5) $\boldsymbol{y'=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}}$

(6) $\boldsymbol{y'=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}}$

(7) $y'=\log x$　(8) $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

解説 (1) $y'=\dfrac{1}{4x}\cdot(4x)'=\dfrac{1}{4x}\cdot4=\dfrac{1}{x}$

(別解)

$y=\log4+\log x$ より，$y'=\dfrac{1}{x}$

(2) $y'=2e^{2x}(x+\log x)+e^{2x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$=e^{2x}\left(2x+2\log x+1+\dfrac{1}{x}\right)$

(3) $y'=2xe^{-3x}+(x^2+3)e^{-3x}\cdot(-3)$

$=(-3x^2+2x-9)e^{-3x}$

(4) $y'=e^{-x^2}\cdot(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$

(5) $y'=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}$

$=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

(6) $y'=\dfrac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}$

$=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$

(7) $y'=(x)'\cdot\log x+x\cdot(\log x)'-(x)'$

$=\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1$

$=\log x$

(8) $y'=\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\left(1-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$

$=\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

3 $\{(f\circ g)(x)\}'=-3\cos^2x\sin x$

$\{(g\circ f)(x)\}'=-3x^2\sin x^3$

解説 $(f\circ g)(x)=(\cos x)^3$ より

$\{(f\circ g)(x)\}'=3\cos^2x\cdot(\cos x)'$

$=-3\cos^2x\sin x$

$(g\circ f)(x)=\cos x^3$ より

$\{(g\circ f)(x)\}'=-\sin x^3\cdot(x^3)'$

$=-3x^2\sin x^3$

4 (1) 1　(2) $3\sin^2a\cos a$

解説 (1) $f(x)=e^x\log(x+1)$ とおくと

$f'(x)=e^x\log(x+1)+e^x\cdot\dfrac{1}{x+1}$

$=e^x\left\{\log(x+1)+\dfrac{1}{x+1}\right\}$

また，$f(0)=0$ であるから

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\log(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=f'(0)=1$

(2) $f(x)=\sin^3x$ とおくと

$f'(x)=3\sin^2x\cos x$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^3x-\sin^3a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=f'(a)$

$=3\sin^2a\cos a$

5 (1) $y'=\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$　(2) $y'=\dfrac{-9x+13}{(x-3)^3}$

(3) $y'=2x^{\log x-1}\log x$

(4) $y'=\dfrac{(16x+7)(x+1)^2}{3(2x+1)\sqrt[3]{2x+1}}$

解説 (1) 両辺の自然対数をとって

$\log y=\log x^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\log x$

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{\sqrt{2}}{x}$

よって

$y'=\dfrac{\sqrt{2}}{x}\cdot y=\dfrac{\sqrt{2}}{x}\cdot x^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$

(2) 両辺の絶対値の自然対数をとって

$\log|y|=\log\left|\dfrac{(2x+1)(x-2)}{(x-3)^2}\right|$

$=\log|2x+1|+\log|x-2|-2\log|x-3|$

よって

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2}{2x+1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}$

$=\dfrac{2(x-2)(x-3)+(2x+1)(x-3)-2(2x+1)(x-2)}{(2x+1)(x-2)(x-3)}$

$=\dfrac{-9x+13}{(2x+1)(x-2)(x-3)}$

$y'=\dfrac{-9x+13}{(2x+1)(x-2)(x-3)}\cdot\dfrac{(2x+1)(x-2)}{(x-3)^2}$

$=\dfrac{-9x+13}{(x-3)^3}$

(3) 両辺の自然対数をとって

$\log y=\log x^{\log x}=(\log x)^2$

$\dfrac{y'}{y}=2\log x\cdot\dfrac{1}{x}$

よって，$y'=\dfrac{2\log x}{x}\cdot x^{\log x}$

$=2x^{\log x-1}\log x$

(4) 両辺の絶対値の自然対数をとって

$\log|y|=\log\left|\dfrac{(x+1)^3}{\sqrt[3]{2x+1}}\right|$

$=3\log|x+1|-\dfrac{1}{3}\log|2x+1|$

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{3(2x+1)}$

$=\dfrac{9(2x+1)-2(x+1)}{3(x+1)(2x+1)}$

$=\dfrac{16x+7}{3(x+1)(2x+1)}$

よって

$y'=\dfrac{16x+7}{3(x+1)(2x+1)}\cdot\dfrac{(x+1)^3}{\sqrt[3]{2x+1}}$

$=\dfrac{(16x+7)(x+1)^2}{3(2x+1)\sqrt[3]{2x+1}}$

P.86 **入試問題演習**

STEP 1

1 (1) $y'=2x\sin(3x+5)+3x^2\cos(3x+5)$

(2) $y'=2(\sin2x+\cos3x)(2\cos2x-3\sin3x)$

(3) $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}\cos\dfrac{x-1}{x+1}$

(4) $y'=-x\sin x$

解説 (1) $y'=(x^2)'\cdot\sin(3x+5)+x^2\cdot\{\sin(3x+5)\}'$

$=2x\sin(3x+5)+x^2\cos(3x+5)\cdot(3x+5)'$

$=2x\sin(3x+5)+3x^2\cos(3x+5)$

(2) $y'=2(\sin2x+\cos3x)\cdot(\sin2x+\cos3x)'$

$=2(\sin2x+\cos3x)(2\cos2x-3\sin3x)$

(3) $y'=\cos\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'$

$=\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}\cos\dfrac{x-1}{x+1}$

$=\dfrac{2}{(x+1)^2}\cos\dfrac{x-1}{x+1}$

(4) $y'=(x)'\cdot\cos x+x\cdot(\cos x)'-(\sin x)'$

$=\cos x-x\sin x-\cos x$

$=-x\sin x$

2 (1) $\dfrac{3}{4}$　(2) -2

(3) $n=1$ のとき，$f'(0)=2$

$n\geqq2$ のとき，$f'(0)=0$

解説 (1) $f'(x)=(\log\sqrt{x})^2+x\cdot2\log\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$=(\log\sqrt{x})^2+\log\sqrt{x}$

よって

$f'(e)=(\log\sqrt{e})^2+\log\sqrt{e}$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3}{4}$

(参考)

$f(x)=x\left(\dfrac{1}{2}\log x\right)^2=\dfrac{1}{4}x(\log x)^2$

と変形してから微分するのもよい。

(2) $f'(x)=\log(2x+3)+x\cdot\dfrac{2}{2x+3}$

$=\log(2x+3)+\dfrac{2x}{2x+3}$

よって

$f'(-1)=\log1+\dfrac{-2}{-2+3}=-2$

(3) $n=1$ のとき，$f(x)=e^x-e^{-x}$ より

$f'(x)=e^x+e^{-x}$

$f'(0)=1+1=2$

$n\geqq2$ のとき

$f'(x)=n(e^x-e^{-x})^{n-1}(e^x-e^{-x})'$

$=n(e^x-e^{-x})^{n-1}(e^x+e^{-x})$

よって，$f'(0)=n(1-1)^{n-1}(1+1)=0$

3 (1) $y'=\log2\cdot2^{\sin x}\cos x$

(2) $y'=2x^{2x}(\log x+1)$

解説 (1) $y=2^{\sin x}>0$ であるから，両辺の自然対数をとると

$\log y=\log2^{\sin x}=(\sin x)\cdot\log2$

$\dfrac{y'}{y}=\log2\cdot\cos x$

よって

$y'=\log2\cdot y\cos x$

$=\log2\cdot2^{\sin x}\cos x$

(2) 両辺の自然対数をとると

$\log y=\log x^{2x}=2x\log x$

$\dfrac{y'}{y}=2(\log x+1)$

よって，$y'=2y(\log x+1)$

$=2x^{2x}(\log x+1)$

4 (1) $f(x)=\log_a x$ とおくと

$f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\log_a\dfrac{x+h}{x}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\log_a\left(1+\dfrac{h}{x}\right)$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\log_a\left\{\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right\}^{\frac{h}{x}}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\cdot\dfrac{h}{x}\log_a\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$

$=\dfrac{1}{x}\log_a e$

$=\dfrac{1}{x\log_e a}$

(2) $a=e^{\log_e a}$ が成り立つから，$f(x)=a^x$ とおくと

$f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{a^x(a^h-1)}{h}$

$$=a^x\lim_{h\to0}\frac{(e^{\log_e a})^h-1}{h}$$
$$=a^x\lim_{h\to0}\frac{e^{h\log_e a}-1}{h}$$
$$=a^x\lim_{h\to0}\frac{e^{h\log_e a}-1}{h\log_e a}\cdot\log_e a$$
$$=a^x\log_e a$$

解説 導関数の定義は，$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

これにあてはめて，対数の計算公式や指数法則などを用いて計算する。

(1)では，$h\to0$ のとき $\frac{h}{x}\to0$ であること，(2)では，$h\to0$ のとき $h\log_e a\to0$ であることを用いる。

$\frac{h}{x}=t$ や $h\log_e a=t$ のような文字の置きかえをすると見やすい。

STEP2

1 $2a^2\sin a\cos a-2a\sin^2 a$

解説 $f(x)=a^2\sin^2 x-x^2\sin^2 a$ とおくと，$f(a)=0$ が成り立つ。また

$f'(x)=2a^2\sin x\cos x-2x\sin^2 a$

よって，$\lim_{x\to a}\frac{a^2\sin^2 x-x^2\sin^2 a}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=f'(a)$

$=2a^2\sin a\cos a-2a\sin^2 a$

(別解)

$\lim_{x\to a}\frac{a^2\sin^2 x-x^2\sin^2 a}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{a^2(\sin^2 x-\sin^2 a)-(x^2-a^2)\sin^2 a}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{a^2(\sin x-\sin a)(\sin x+\sin a)}{x-a}\right.$

$\left.-\frac{(x+a)(x-a)\sin^2 a}{x-a}\right\}$

$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot a^2(\sin x+\sin a)\right.$

$\left.-(x+a)\sin^2 a\right\}$

$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$ は，$\sin x$ の $x=a$ における微分係数を表しているから，$\cos a$ と等しい。

よって

与式$=\cos a\cdot a^2\cdot2\sin a-2a\sin^2 a$

$=2a^2\sin a\cos a-2a\sin^2 a$

第18講 いろいろな関数の導関数(2)

P.88～P.89 **類題**

1 (1) $y''=-60x^4$　(2) $y''=-32\cos8x$

(3) $y''=9e^{3x}$

解説 (1) $y'=-12x^5$，$y''=-60x^4$

(2) $y'=2\cos4x\cdot(\cos4x)'$

$=-8\cos4x\sin4x$

$=-4\sin8x$

$y''=-32\cos8x$

(3) $y'=3e^{3x}$

$y''=9e^{3x}$

2 (1) $y^{(n)}=2^n e^{2x}$　(2) $y^{(n)}=(n+1)!\,x$

解説 (1) $y'=2e^{2x}$，$y''=2^2e^{2x}$，$y'''=2^3e^{2x}$，…

のようになるから

$y^{(n)}=2^n e^{2x}$

(2) $y'=(n+1)x^n$，$y''=(n+1)nx^{n-1}$，

$y'''=(n+1)n(n-1)x^{n-2}$，…のようになるから

$y^{(n)}=(n+1)n(n-1)\cdots(n+1-n+1)$

$\times x^{n+1-n}$

$=(n+1)!\,x$

3 $a=6$，$b=-10$

解説 $y'=3e^{3x}\sin x+e^{3x}\cos x$

$=e^{3x}(3\sin x+\cos x)$

$y''=3e^{3x}(3\sin x+\cos x)+e^{3x}(3\cos x-\sin x)$

$=e^{3x}(8\sin x+6\cos x)$

$y''=ay'+by$ に代入して整理すると

$e^{3x}(8\sin x+6\cos x)$

$=e^{3x}\{(3a+b)\sin x+a\cos x\}$

よって，$3a+b=8$，$a=6$

これらより，$a=6$，$b=-10$

4 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1-x}{y+3}$　(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{4y}$

解説 (1) $(x-1)^2+(y+3)^2=9$ の両辺を x で微分すると

$2(x-1)+2(y+3)\frac{dy}{dx}=0$

よって，$\frac{dy}{dx}=-\frac{x-1}{y+3}=\frac{1-x}{y+3}$

(2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ の両辺を x で微分すると

$\frac{x}{8}-\frac{y}{2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

よって，$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{4y}$

5 (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{t+1}{t}$　(2) $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$

解説 (1) $\frac{dx}{dt}=-2t$，$\frac{dy}{dt}=2t+2$

よって，$\frac{dy}{dx}=\frac{2t+2}{-2t}=-\frac{t+1}{t}$

(2) $\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta+\sin\theta$

$\frac{dy}{d\theta}=-2\cos\theta\sin\theta=-\sin2\theta$

よって，$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$

P.90 **演習問題**

1 (1) $y''=150x^4+36x^2-16$

(2) $y''=2e^{x^2}(2x^2+1)$

(3) $y''=3\sin x(2\cos^2 x-\sin^2 x)$

(4) $y''=\frac{1}{x}$

解説 (1) $y'=30x^5+12x^3-16x+4$

$y''=150x^4+36x^2-16$

(2) $y'=2xe^{x^2}$

$y''=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}$

$=2e^{x^2}(2x^2+1)$

(3) $y'=3\sin^2 x\cos x$

$y''=3\{2\sin x\cos x\cdot\cos x+\sin^2 x(-\sin x)\}$

$=3\sin x(2\cos^2 x-\sin^2 x)$

(4) $y'=\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$

$y''=\frac{1}{x}$

2 $f'(x)=(2x-1)^3(10x+7)$

$f''(x)=16(2x-1)^2(5x+2)$

$f'''(x)=48(2x-1)(10x+1)$

解説 $f'(x)=8(2x-1)^3(x+1)+(2x-1)^4$

$=(2x-1)^3\{8(x+1)+(2x-1)\}$

$=(2x-1)^3(10x+7)$

$f''(x)=6(2x-1)^2(10x+7)+10(2x-1)^3$

$=2(2x-1)^2\{3(10x+7)+5(2x-1)\}$

$=2(2x-1)^2(40x+16)$

$=16(2x-1)^2(5x+2)$

$f'''(x)=16\{4(2x-1)(5x+2)+5(2x-1)^2\}$

$=16(2x-1)\{4(5x+2)+5(2x-1)\}$

$=16(2x-1)(30x+3)$

$=48(2x-1)(10x+1)$

3 (1) $n\leqq6$ のとき，$y^{(n)}=\frac{6!}{(6-n)!}x^{6-n}$

$n\geqq7$ のとき，$y^{(n)}=0$

(2) $y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$　(3) $y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

(4) $y^{(n)}=(-1)^n e^{-x}$

解説 (1) $y'=6x^5$

$y''=6\cdot5x^4$

$y'''=6\cdot5\cdot4x^3$

$y^{(4)}=6\cdot5\cdot4\cdot3x^2$

$y^{(5)}=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2x$

$y^{(6)}=6!$

これらは，$y^{(n)}=\frac{6!}{(6-n)!}x^{6-n}$ とまとめることができる。

また，$n\geqq7$ のときは，$y^{(n)}=0$

(2) $y'=\cos x$ であるから，これを

$y'=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ と表すこともできる。

これをくり返し用いれば

$y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$

となることがわかる。

(3) $y'=-\frac{1}{x^2}$，$y''=\frac{2}{x^3}$，$y'''=-\frac{6}{x^4}$，…

のようになるから

$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

とまとめられる。

(4) $y'=-e^{-x}$，$y''=e^{-x}$，$y'''=-e^{-x}$，…

のようになるから

$y^{(n)}=(-1)^n e^{-x}$

4 (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2}{y^2}$　(2) $\frac{dy}{dx}=y(e^x-2)$

解説 (1) $x^3+y^3=1$ の両辺を x で微分して

$3x^2+3y^2\cdot\frac{dy}{dx}=0$

よって，$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2}{y^2}$

(2) $e^x-\log y=2x$ の両辺を x で微分して

$e^x-\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=2$

$\frac{dy}{dx}=y(e^x-2)$

5 $1+(y')^2+yy''=0$

解説 $x^2+y^2=1$ の両辺を x で微分して

$2x+2yy'=0$

$x+yy'=0$

さらに，この式の両辺を x で微分して

$1+(y')^2+yy''=0$

6 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{2(t^4+1)}{t(t^2-1)}$　(2) $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2\tan\theta}$

解説 (1) $\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$，$\frac{dy}{dt}=2t+\frac{2}{t^3}$

よって

$\frac{dy}{dx}=\left(2t+\frac{2}{t^3}\right)\div\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$

$=\frac{2(t^4+1)}{t^3}\cdot\frac{t^2}{t^2-1}$

$$=\frac{2(t^4+1)}{t(t^2-1)}$$

(2) $\frac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=3\cos\theta$

よって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\cos\theta}{-2\sin\theta}$$

$$=-\frac{3}{2\tan\theta}$$

7 $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{t^3}$

解説 $\frac{dx}{dt}=2t,\ \frac{dy}{dt}=4$

よって，$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{2t}=\frac{2}{t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=-\frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=-\frac{1}{t^3}$$

(注)

$\frac{d^2y}{dx^2}$ は $\frac{dy}{dx}$ を x で微分するので，

$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{2}{t}\right)'=-\frac{2}{t^2}$ とならないことに注意。

(参考)

与えられた関係式から t を消去して微分すると，次のようになる。

$x=t^2-1$ より，$t=\pm\sqrt{x+1}$

よって，$y=\pm4\sqrt{x+1}-2$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{2}{\sqrt{x+1}}=\pm2(x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\mp(x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=-(\pm\sqrt{x+1})^{-3}$$

$=-t^{-3}$ (複号はすべて同順)

この方法は，微分の計算自体はやりやすいが，複号の処理を誤りやすいので注意しなければならない。複号を2つの場合に分けて計算するのもよい。

P.91 **入試問題演習**

STEP 1

1 $f'(x)=-e^{-x}+2(x+1)e^x$

$f''(x)=e^{-x}+2(x+2)e^x$

解説 $f'(x)=-e^{-x}+2e^x+2xe^x$

$$=-e^{-x}+2(x+1)e^x$$

$$f''(x)=e^{-x}+2e^x+2(x+1)e^x$$

$$=e^{-x}+2(x+2)e^x$$

2 (1) $f'(x)=e^x(\sin\sqrt{3}x+\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x)$

(2) $f'''(x)=-8e^x\sin\sqrt{3}x$

(3) $f^{(12)}(x)=4096e^x\sin\sqrt{3}x$

解説 (1) $f'(x)=e^x\sin\sqrt{3}x+\sqrt{3}e^x\cos\sqrt{3}x$

$$=e^x(\sin\sqrt{3}x+\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x)$$

(2) $f'(x)=2e^x\sin\left(\sqrt{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$

と変形できる。

同様にして

$$f''(x)=2e^x\sin\left(\sqrt{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$+2\sqrt{3}e^x\cos\left(\sqrt{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2e^x\left\{\sin\left(\sqrt{3}x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=2^2e^x\sin\left(\sqrt{3}x+\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$f'''(x)=2^3e^x\sin(\sqrt{3}x+\pi)$$

$$=-8e^x\sin\sqrt{3}x$$

(3) (2)より，$f^{(n)}(x)=2^ne^x\sin\left(\sqrt{3}x+\frac{n}{3}\pi\right)$

よって

$$f^{(12)}(x)=2^{12}e^x\sin(\sqrt{3}x+4\pi)$$

$$=4096e^x\sin\sqrt{3}x$$

3 $a=-\frac{3}{2}$

解説 $y'=a\cos x-ax\sin x+\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\sin x$

$$+(\log|\sin x|)\cos x$$

$$=(a+1)\cos x-ax\sin x+(\log|\sin x|)\cos x$$

$$y''=-(a+1)\sin x-a\sin x-ax\cos x$$

$$+\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\cos x-(\log|\sin x|)\sin x$$

$$=-(2a+1)\sin x-ax\cos x$$

$$+\frac{\cos^2x}{\sin x}-(\log|\sin x|)\sin x$$

よって，$y''+y=\frac{1}{\sin x}+\sin x$ より

$$-(2a+1)\sin x+\frac{\cos^2x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x}+\sin x$$

$$\frac{1-\cos^2x}{\sin x}+2(a+1)\sin x=0$$

$$\sin x+2(a+1)\sin x=0$$

$$(2a+3)\sin x=0$$

ゆえに，$a=-\frac{3}{2}$

4 (1) $\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{4}{y}$

解説 (1) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ の両辺を x で微分して

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

$$=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(2) $y^2=8(x-1)$ の両辺を x で微分して

$$2y\cdot\frac{dy}{dx}=8$$

よって，$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{y}$

5 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{3\sqrt{1+t^2}}{t}$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\tan\theta}$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}$

解説 (1) $\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$$\frac{dy}{dt}=3$$

よって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}$$

$$=\frac{3\sqrt{1+t^2}}{t}$$

(2) $\frac{dx}{d\theta}=-\frac{2\cos\theta\cdot(-\sin\theta)}{\cos^4\theta}=\frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta}$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

よって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta}}=\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{2\tan\theta}$$

(別解)

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ が成り立つから

$$1+y^2=x$$

よって，$2y\cdot\frac{dy}{dx}=1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\tan\theta}$$

(3) $\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$

$$\frac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$$

よって，$\frac{dy}{dx}=\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}$

STEP 2

1 (1) $f'(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$$=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(2) $f''(x)=-\frac{(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1}$

$$=-\frac{2x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

よって

$$(x^2+1)f''(x)+xf'(x)$$

$$=(x^2+1)\left(-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\right)+x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

(3) $(x^2+1)f^{(n+1)}(x)+(2n-1)xf^{(n)}(x)$

$+(n-1)^2f^{(n-1)}(x)=0$ ……⊛

とする。

(I) $n=1$ のとき

(左辺)$=(x^2+1)f^{(2)}(x)+xf^{(1)}(x)$

(2)より，(左辺)$=0$ となるから，$n=1$ のとき，⊛が成り立つ。

(II) $n=k$ のとき

⊛が成り立つと仮定すると

$$(x^2+1)f^{(k+1)}(x)+(2k-1)xf^{(k)}(x)$$

$$+(k-1)^2f^{(k-1)}(x)=0$$

両辺を微分すると

$$2xf^{(k+1)}(x)+(x^2+1)f^{(k+2)}(x)$$

$$+(2k-1)f^{(k)}(x)+(2k-1)xf^{(k+1)}(x)$$

$$+(k-1)^2f^{(k)}(x)$$

$$=(x^2+1)f^{(k+2)}(x)+(2k+1)xf^{(k+1)}(x)$$

$$+k^2f^{(k)}(x)$$

$$=0$$

よって，$n=k+1$ のときにも⊛が成り立つ。

(I)，(II)より，任意の自然数 n に対して⊛が成り立つ。

第19講　微分の応用(1)　―接線―

P.93～P.94　**類題**

1　(1)　**接線**　$\boldsymbol{y=-2x+8}$，**法線**　$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+3}$

(2)　**接線**　$\boldsymbol{y=\frac{e^3}{2}x-2e^3}$，**法線**　$\boldsymbol{y=-\frac{2}{e^3}x+\frac{12}{e^3}+e^3}$

解説 (1)　$y'=\frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}$

よって，$x=2$ のとき，$y'=-2$

接線の方程式は，$y-4=-2(x-2)$ より

$y=-2x+8$

法線の方程式は，$y-4=\frac{1}{2}(x-2)$ より

$y=\frac{1}{2}x+3$

(2)　$y'=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$ より，$x=6$ のとき，$y'=\frac{e^3}{2}$

接線の方程式は，$y-e^3=\frac{e^3}{2}(x-6)$ より

$y=\frac{e^3}{2}x-2e^3$

法線の方程式は，$y-e^3=-\frac{2}{e^3}(x-6)$ より

$y=-\frac{2}{e^3}x+\frac{12}{e^3}+e^3$

2　$\boldsymbol{y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}}$

解説　$y=\sqrt{3x-5}$ より，$y'=\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$

よって，$x=a$ における接線の方程式は

$y-\sqrt{3a-5}=\frac{3}{2\sqrt{3a-5}}(x-a)$　……①

傾きが $\frac{3}{4}$ であるから，$\frac{3}{2\sqrt{3a-5}}=\frac{3}{4}$

$3a-5=4$ より，$a=3$

①に代入して，$y-2=\frac{3}{4}(x-3)$

すなわち，$y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

3　$\boldsymbol{y=\frac{2}{e^3}x+2}$

解説　$y=\log 2x$ より，$y'=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$

よって，$x=a$ における接線の方程式は

$y-\log 2a=\frac{1}{a}(x-a)$　……①

①が$(0,\ 2)$を通るとき

$2-\log 2a=\frac{1}{a}\times(-a)$

$\log 2a=3$

$2a=e^3$

$a=\frac{e^3}{2}$

①に代入して整理すると，求める接線の方程式は

$y=\frac{2}{e^3}x+2$

4　$\boldsymbol{a=2}$

解説　共有点の x 座標を $x=t$ とおくと，共有点における y 座標は等しいから

$\frac{a}{t}=-t^2+3$　……①

また，$f'(x)=-\frac{a}{x^2}$，$g'(x)=-2x$ であり，共有点における接線の傾きが等しいから

$-\frac{a}{t^2}=-2t$

すなわち，$a=2t^3$　……②

②を①に代入して整理すると，$t^2=1$

これを解いて，$t=\pm1$

$t=1$ を②に代入すると，$a=2$

$t=-1$ を②に代入すると，$a=-2$

よって，$a>0$ より，$a=2$

5　$\boldsymbol{y=\frac{3}{4}x-1}$

解説　双曲線の方程式の両辺を x について微分して

$\frac{x}{8}-\frac{1}{4}yy'=0$

よって，$y\neq0$ のとき，$y'=\frac{x}{2y}$

双曲線上の点$(12,\ 8)$における接線の傾きは

$y'=\frac{12}{2\cdot8}=\frac{3}{4}$

接線の方程式は，$y-8=\frac{3}{4}(x-12)$

すなわち，$y=\frac{3}{4}x-1$

(別解)

$\frac{x_1x}{16}-\frac{y_1y}{8}=1$ に $x_1=12$，$y_1=8$ を代入して

$\frac{3}{4}x-y=1$

整理すると，$y=\frac{3}{4}x-1$

P.95　**演習問題**

1　(1)　**接線**　$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+1}$，**法線**　$\boldsymbol{y=2x-\frac{3}{2}}$

(2)　**接線**　$\boldsymbol{y=e^{\frac{\pi}{2}}x-\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}}$

法線　$\boldsymbol{y=-e^{-\frac{\pi}{2}}x+\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}}$

(3)　**接線**　$\boldsymbol{y=\frac{2+\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{1}{2}}$

法線　$\boldsymbol{y=-2(2-\sqrt{3})x+\frac{5-2\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{1}{2}}$

(4)　**接線**　$\boldsymbol{y=-\frac{1}{e}}$，**法線**　$\boldsymbol{x=\frac{1}{e}}$

(5)　**接線**　$\boldsymbol{y=-\frac{4}{\pi^2}x+\frac{4}{\pi}}$

法線　$\boldsymbol{y=\frac{\pi^2}{4}x-\frac{\pi^3}{8}+\frac{2}{\pi}}$

(6)　**接線**　$\boldsymbol{y=-ex-1}$

法線　$\boldsymbol{y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}+e-1}$

解説 (1)　$y'=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$x=1$ のとき，$y=\frac{1}{2}$，$y'=-\frac{1}{2}$ であるから，接線の方程式は

$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)$

$y=-\frac{1}{2}x+1$

法線の方程式は，$y-\frac{1}{2}=2(x-1)$

$y=2x-\frac{3}{2}$

(2)　$y'=e^x(\sin x+\cos x)$

$x=\frac{\pi}{2}$ のとき，$y=y'=e^{\frac{\pi}{2}}$ であるから，接線の方程式は

$y-e^{\frac{\pi}{2}}=e^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$y=e^{\frac{\pi}{2}}x-\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}$

法線の方程式は

$y-e^{\frac{\pi}{2}}=-e^{-\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$y=-e^{-\frac{\pi}{2}}x+\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}$

(3)　$y'=1+\cos x$

$x=\frac{\pi}{6}$ のとき

$y=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$，$y'=1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

接線の方程式は

$y-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$y=\frac{2+\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{1}{2}$

法線の方程式は

$y-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{2+\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$y=-2(2-\sqrt{3})x+\frac{5-2\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{1}{2}$

(4)　$y'=\log x+1$

$x=\frac{1}{e}$ のとき，$y=-\frac{1}{e}$，$y'=0$

よって，接線の方程式は，$y=-\frac{1}{e}$

法線の方程式は，$x=\frac{1}{e}$

(5)　$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$x=\frac{\pi}{2}$ のとき，$y=\frac{2}{\pi}$，$y'=-\frac{4}{\pi^2}$ であるから，接線の方程式は

$y-\frac{2}{\pi}=-\frac{4}{\pi^2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$y=-\frac{4}{\pi^2}x+\frac{4}{\pi}$

法線の方程式は，$y-\frac{2}{\pi}=\frac{\pi^2}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$y=\frac{\pi^2}{4}x-\frac{\pi^3}{8}+\frac{2}{\pi}$

(6)　$y'=-e^{-x}$

$x=-1$ のとき，$y=e-1$，$y'=-e$ であるから，接線の方程式は

$y-(e-1)=-e(x+1)$

$y=-ex-1$

法線の方程式は，$y-(e-1)=\frac{1}{e}(x+1)$

$y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}+e-1$

2　(1)　$\boldsymbol{y=2x-2}$，$\boldsymbol{y=2x-\frac{50}{27}}$

(2)　$\boldsymbol{y=10x-16}$，$\boldsymbol{y=10x+\frac{80}{27}}$

解説 (1)　$y=x\sqrt{x-1}$ より

$y'=\sqrt{x-1}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$=\frac{2(x-1)+x}{2\sqrt{x-1}}$

$=\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$

よって，$x=a$ における接線の方程式は

$y-a\sqrt{a-1}=\frac{3a-2}{2\sqrt{a-1}}(x-a)$　……①

傾きが2であるから，$\frac{3a-2}{2\sqrt{a-1}}=2$

$3a-2=4\sqrt{a-1}$ ……② より

$9a^2-12a+4=16a-16$

$9a^2-28a+20=0$

$(a-2)(9a-10)=0$

$a=2,\ \frac{10}{9}$ （ともに②を満たす。）

①に $a=2$ を代入して，$y-2=2(x-2)$

すなわち，$y=2x-2$

①に $a=\frac{10}{9}$ を代入して

$$y-\frac{10}{9}\times\frac{1}{3}=2\left(x-\frac{10}{9}\right)$$

すなわち，$y=2x-\frac{50}{27}$

(2) $y=2x(x-1)^2$ より

$y'=2(x-1)^2+2x\cdot2(x-1)$

$=2x^2-4x+2+4x^2-4x$

$=6x^2-8x+2$

よって，$x=a$ における接線の方程式は

$y-2a(a-1)^2=(6a^2-8a+2)(x-a)$ ……①

傾きが10であるから

$6a^2-8a+2=10$

$3a^2-4a-4=0$

$(a-2)(3a+2)=0$

$a=2,\ -\frac{2}{3}$

①に $a=2$ を代入して，$y-4=10(x-2)$

すなわち，$y=10x-16$

①に $a=-\frac{2}{3}$ を代入して

$$y+\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^2=10\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

すなわち，$y=10x+\frac{80}{27}$

3 $y=\frac{1}{e^2}x$

解説 $y'=\frac{1}{x}$ より，$x=a\ (a>0)$ における接線の方程式は

$y-(\log a-1)=\frac{1}{a}(x-a)$

$y=\frac{1}{a}x+\log a-2$ ……①

①が原点を通るとき

$\log a-2=0$

$a=e^2$

①に代入すると，求める接線の方程式は

$y=\frac{1}{e^2}x$

4 $a=\frac{3}{2e^2}$，$b=\frac{e^2}{2}$，$c=e^2$

解説 $f(x)=\log x$，$g(x)=ax+\frac{b}{x}$ とおくと，$f(x)$ が点$(c,\ 2)$を通ることから

$2=\log c$

$c=e^2$ ……①

$g(x)$ が点$(c,\ 2)$を通ることから

$ac+\frac{b}{c}=2$

①を代入して，$e^2a+\frac{b}{e^2}=2$ ……②

また，$f'(x)=\frac{1}{x}$

$g'(x)=a-\frac{b}{x^2}$

であり，点$(c,\ 2)$における $f(x)$ と $g(x)$ の接線の傾きは等しいから

$\frac{1}{c}=a-\frac{b}{c^2}$

①を代入して，$\frac{1}{e^2}=a-\frac{b}{e^4}$

$a=\frac{b}{e^4}+\frac{1}{e^2}$ ……③

③を②に代入して，$\frac{b}{e^2}+1+\frac{b}{e^2}=2$

$\frac{2b}{e^2}=1$

$b=\frac{e^2}{2}$

③に代入して，$a=\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{e^2}=\frac{3}{2e^2}$

5 $y=-\frac{\sqrt{2}}{6}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$y=\frac{\sqrt{2}}{6}x-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

解説 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ に $x=1$ を代入すると

$\frac{1}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

$y^2=\frac{32}{9}$

$y=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$

楕円の方程式の両辺を x について微分して

$\frac{2}{9}x+\frac{1}{2}yy'=0$

よって，$y\neq0$ のとき，$y'=-\frac{4x}{9y}$ ……①

①に $x=1$，$y=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ を代入すると

$y'=-\frac{4}{9}\times1\times\frac{3}{4\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{6}$

よって，接線の方程式は

$y-\frac{4\sqrt{2}}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{6}(x-1)$

すなわち，$y=-\frac{\sqrt{2}}{6}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

①に $x=1$，$y=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$ を代入すると

$y'=-\frac{4}{9}\times1\times\left(-\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}$

よって，接線の方程式は

$y+\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}(x-1)$

すなわち，$y=\frac{\sqrt{2}}{6}x-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

（別解）

$\frac{x_1x}{9}+\frac{y_1y}{4}=1$ ……① とする。

①に $x_1=1$，$y_1=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ を代入すると

$\frac{1}{9}x+\frac{1}{4}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3}y=1$

$x+3\sqrt{2}y=9$

これを変形して，$y=-\frac{\sqrt{2}}{6}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

①に $x_1=1$，$y_1=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$ を代入すると

$\frac{1}{9}x+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)y=1$

$x-3\sqrt{2}y=9$

これを変形して，$y=\frac{\sqrt{2}}{6}x-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

6 接線 $y=\pi x-\pi e^2$，法線 $y=-\frac{1}{\pi}x+\frac{e^2}{\pi}$

解説 $\frac{dx}{dt}=e^t\cos\pi t-\pi e^t\sin\pi t$

$\frac{dy}{dt}=e^t\sin\pi t+\pi e^t\cos\pi t$

$t=2$ のとき，$\frac{dx}{dt}=e^2$，$\frac{dy}{dt}=\pi e^2$ であるから

$\frac{dy}{dx}=\pi$

また，$t=2$ のとき，$x=e^2$，$y=0$

よって，接線の方程式は

$y=\pi(x-e^2)=\pi x-\pi e^2$

法線の方程式は

$y=-\frac{1}{\pi}(x-e^2)=-\frac{1}{\pi}x+\frac{e^2}{\pi}$

P.96 入試問題演習

STEP 1

1 接線 $y=\frac{1}{e^3}x+2$

法線 $y=-2x+\log2+4$

解説 $y=\log x$ より，$y'=\frac{1}{x}$

$x=a$ における接線の方程式は

$y-\log a=\frac{1}{a}(x-a)$

$y=\frac{1}{a}x+\log a-1$ ……①

①が$(0,\ 2)$を通るとき

$\log a-1=2$

$\log a=3$

$a=e^3$

①に代入すると，接線の方程式は

$y=\frac{1}{e^3}x+2$

$x=2$ のとき，$y'=\frac{1}{2}$

$x=2$ における法線の方程式は

$y-\log2=-2(x-2)$

$y=-2x+\log2+4$

2 (1) $y=2ax-a$ (2) $y=\frac{1}{2}ax-4a$

(3) $a=\frac{36}{5}$

解説 (1) $y=\frac{ax}{2-x}$ より

$y'=\frac{a(2-x)+ax}{(2-x)^2}=\frac{2a}{(2-x)^2}$

$x=1$ のとき，$y'=2a$ であるから，ℓ_1 の方程式は

$y-a=2a(x-1)$

$y=2ax-a$ ……①

(2) $x=4$ のとき，$y'=\frac{1}{2}a$ であるから，ℓ_2 の方程式は

$y+2a=\frac{1}{2}a(x-4)$

$y=\frac{1}{2}ax-4a$ ……②

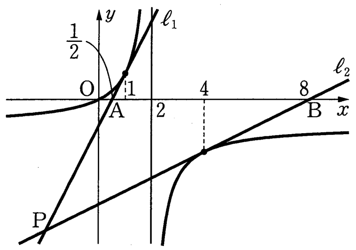
(3) (1)，(2)より，$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(8,\ 0)$

①−② より，$\frac{3}{2}ax+3a=0$

$x=-2$

①に代入して，$y=-5a$

よって，P$(-2,\ -5a)$



AB$=8-\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$

ABを底辺としたときの△PABの高さは

$|-5a|=5a$

よって，題意より

$\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot 5a=135$

ゆえに，$a=\frac{36}{5}$

3 $c=3\log\frac{3}{2}-\frac{3}{4}$

接線 $y=2x+3\log\frac{3}{2}-3$

解説 $f(x)=x^2-x+c$，$g(x)=3\log x$

P$(t,\ 3\log t)$ $(t>0)$

とおく。

共有点におけるy座標は等しいから

$t^2-t+c=3\log t$ ……①

また，$f'(x)=2x-1$

$g'(x)=\frac{3}{x}$

であり，共有点における接線の傾きが等しいから

$2t-1=\frac{3}{t}$

$2t^2-t-3=0$

$(2t-3)(t+1)=0$

$t>0$ より，$t=\frac{3}{2}$

これを①に代入すると

$\frac{9}{4}-\frac{3}{2}+c=3\log\frac{3}{2}$

$c=3\log\frac{3}{2}-\frac{3}{4}$

また，P$\left(\frac{3}{2},\ 3\log\frac{3}{2}\right)$となるから，接線の方程式は

$y-3\log\frac{3}{2}=3\times\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$y=2x+3\log\frac{3}{2}-3$

4 $y=2x-\frac{3}{2}$

解説 $\frac{\sqrt{x}}{2}+\sqrt{\frac{y}{2}}=1$ ……①

①の両辺をxで微分して

$\frac{1}{4\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{2y}}\cdot y'=0$

$y'=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2y}{x}}$

$x=1$，$y=\frac{1}{2}$ のとき，$y'=-\frac{1}{2}$

よって，求める法線の方程式は

$y-\frac{1}{2}=2(x-1)$

$y=2x-\frac{3}{2}$

5 (1) M$\left(\frac{1}{1+t},\ \frac{\sqrt{t}}{1+t}\right)$

(2) $y=\frac{2\sqrt{t}}{1-t}x-\frac{\sqrt{t}}{1-t}$

(3) Cの法線は，$y=\frac{\sqrt{t}}{1-t}(2x-1)$ と表されるから，つねに定点$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$を通る。

定点 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

解説(1) M$(X,\ Y)$とすると

$X=\frac{1}{2}(x+1)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-t}{1+t}+1\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+t}$

$=\frac{1}{1+t}$

$Y=\frac{1}{2}y=\frac{\sqrt{t}}{1+t}$

すなわち，M$\left(\frac{1}{1+t},\ \frac{\sqrt{t}}{1+t}\right)$

(2) $\frac{dX}{dt}=-\frac{1}{(1+t)^2}$

$\frac{dY}{dt}=\frac{1}{(1+t)^2}\left(\frac{1+t}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)$

$=\frac{1-t}{2(1+t)^2\sqrt{t}}$

よって

$\frac{dY}{dX}=\frac{\frac{1-t}{2(1+t)^2\sqrt{t}}}{-\frac{1}{(1+t)^2}}$

$=-\frac{1-t}{2\sqrt{t}}$

したがって，MにおけるCの法線の方程式は

$y-\frac{\sqrt{t}}{1+t}=\frac{2\sqrt{t}}{1-t}\left(x-\frac{1}{1+t}\right)$

$y=\frac{2\sqrt{t}}{1-t}x-\frac{\sqrt{t}}{1+t}\left(\frac{2}{1-t}-1\right)$

$y=\frac{2\sqrt{t}}{1-t}x-\frac{\sqrt{t}}{1-t}$

STEP2

1 (1) $-2<m<2$，接点 $\left(\frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{4-m^2}},\ \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{4-m^2}}\right)$

(2) ℓ：$y=mx+\sqrt{2(4-m^2)}$

ℓ'：$y=-\frac{1}{m}x+\sqrt{2\left(4-\frac{1}{m^2}\right)}$

$x<-\sqrt{\frac{2}{15}}$，$\sqrt{\frac{2}{15}}<x$

曲線 $x^2+y^2=6$

解説(1) $y=\sqrt{4x^2+8}=2\sqrt{x^2+2}$ より

$y'=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}$

よって，$\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}=m$ ……①が実数解をもつようなmの範囲を求めればよい。

①より，$4x^2=m^2(x^2+2)$

$x^2=\frac{2m^2}{4-m^2}$ ……②

$2m^2\geqq 0$ であるから，実数xが求められるためのmの範囲は

$4-m^2>0$ ……③

$-2<m<2$

①より，xとmは同符号であるから，②より

$x=\frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{4-m^2}}$

このとき

$y=2\sqrt{\frac{2m^2}{4-m^2}+2}=\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{4-m^2}}$

$=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{4-m^2}}$

すなわち接点は，$\left(\frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{4-m^2}},\ \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{4-m^2}}\right)$

(2) ℓの方程式は

$y-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{4-m^2}}=m\left(x-\frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{4-m^2}}\right)$

$y=mx+\frac{\sqrt{2}(4-m^2)}{\sqrt{4-m^2}}$

よって，$y=mx+\sqrt{2(4-m^2)}$ ……④

ℓ'の方程式は，ℓの方程式のmを$-\frac{1}{m}$で置きかえて

$y=-\frac{1}{m}x+\sqrt{2\left(4-\frac{1}{m^2}\right)}$ ……⑤

ℓ'が存在するための条件は，③でmを$-\frac{1}{m}$に置きかえて

$4-\frac{1}{m^2}>0$

$m^2>\frac{1}{4}$

②より

$x^2=\frac{2m^2}{4-m^2}=\frac{8}{4-m^2}-2$

ここで，$\frac{1}{4}<m^2<4$ より，$0<4-m^2<\frac{15}{4}$ であるから

$x^2>8\cdot\frac{4}{15}-2=\frac{2}{15}$

よって，ℓの接点のx座標の範囲は

$x<-\sqrt{\frac{2}{15}}$，$\sqrt{\frac{2}{15}}<x$

④より，$y-mx=\sqrt{2(4-m^2)}$

$y^2-2mxy+m^2x^2=2(4-m^2)$ ……⑥

⑤より，$y+\frac{1}{m}x=\sqrt{2\left(4-\frac{1}{m^2}\right)}$

$y^2+\frac{2}{m}xy+\frac{1}{m^2}x^2=2\left(4-\frac{1}{m^2}\right)$

$m^2y^2+2mxy+x^2=2(4m^2-1)$ ……⑦

⑥＋⑦より

$(1+m^2)(x^2+y^2)=6(m^2+1)$

$x^2+y^2=6$

よって，ℓとℓ'の交点は，円$x^2+y^2=6$の周上にある。

第20講　微分の応用(2)　—関数の増減—

P.98〜P.99　**類題**

1　(1)　**極大値**　$\frac{1}{4}$，**極小値**　$-\frac{1}{8}$

(2)　**極大値　なし，極小値**　$-\frac{1}{3e^2}$

解説 (1)　$f'(x)=\frac{(x^2+8)-2x(x+1)}{(x^2+8)^2}$

$=\frac{-x^2-2x+8}{(x^2+8)^2}$

$=-\frac{(x+4)(x-2)}{(x^2+8)^2}$

よって，増減表は下のようになる。

x	…	-4	…	2	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘

極大値は，$f(2)=\frac{1}{4}$

極小値は，$f(-4)=-\frac{1}{8}$

(2)　$f'(x)=e^{3x-1}+3xe^{3x-1}=(3x+1)e^{3x-1}$

よって，増減表は下のようになる。

x	…	$-\frac{1}{3}$	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{3e^2}$	↗

極小値は，$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3e^2}$，極大値はない。

2　**極大値　10，極小値　-22**

解説　$f'(x)=3x^2-6x-9$

$=3(x^2-2x-3)$

$=3(x+1)(x-3)$

よって，$x=-1$，3のとき，$f'(x)=0$となる。

ここで，$f''(x)=6x-6$であるから

$x=-1$を代入して

$f''(-1)=-6-6=-12<0$

$x=3$を代入して，$f''(3)=18-6=12>0$

また，$f(-1)=10$，$f(3)=-22$であるから

$x=-1$のとき極大値10

$x=3$のとき極小値-22

3　(1)　**(1，16)，(3，18)**

(2)　$\left(-3,\ -\frac{2}{e^3}\right)$

解説 (1)　$y'=4x^3-24x^2+36x-7$

$y''=12x^2-48x+36$

$=12(x^2-4x+3)$

$=12(x-1)(x-3)$

よって，凹凸の表は下のようになる。

x	…	1	…	3	…
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	下に凸	16	上に凸	18	下に凸

したがって，変曲点は，(1，16)，(3，18)

(2)　$y'=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

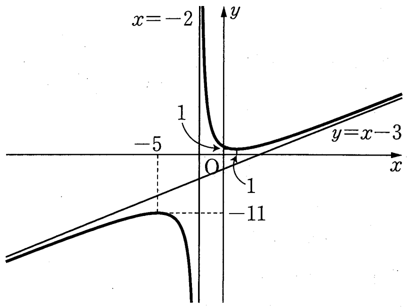
$y''=e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$

よって，凹凸の表は下のようになる。

x	…	-3	…
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	$-\frac{2}{e^3}$	下に凸

したがって，変曲点は，$\left(-3,\ -\frac{2}{e^3}\right)$

4



解説　$f(x)=x-3+\frac{9}{x+2}$と変形できる。

$f'(x)=1-\frac{9}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+4-9}{(x+2)^2}$

$=\frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}=\frac{(x+5)(x-1)}{(x+2)^2}$

$f''(x)=\frac{18}{(x+2)^3}$

よって，$f(x)$の増減と凹凸は次の表のようになる。

x	…	-5	…	-2	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	／	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	-11	↘	／	↘	1	↗

極大値は，$f(-5)=-11$，極小値は，$f(1)=1$

凹凸については，$x<-2$で上に凸

$x>-2$で下に凸

であり，変曲点はない。

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9}{x+2}=0$であるから，$x\to\pm\infty$のとき，$y=f(x)$のグラフは直線$y=x-3$に限りなく近づく。

また，$\lim_{x\to-2+0}f(x)=\infty$，$\lim_{x\to-2-0}f(x)=-\infty$であり，$x\to-2$のとき$y=f(x)$のグラフは直線$x=-2$に限りなく近づく。

すなわち，漸近線は，$y=x-3$，$x=-2$

以上により，グラフの概形は解答の図のようになる。

P.100　**演習問題**

1　**極大値　2，極小値　6**

解説　$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

x	…	0	…	1	…	2	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	／	↘	6	↗

上の増減表より

極大値は，$f(0)=2$

極小値は，$f(2)=6$

2　(1)　**極大値　なし，極小値**　$-\frac{1}{2e}$

(2)　**極大値**　$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，**極小値**　$\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解説 (1)　$f'(x)=2x\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}$

$=2x\log x+x$

$=x(2\log x+1)$

$x>0$であるから，$f'(x)=0$となるとき

$2\log x+1=0$　　$\log x=-\frac{1}{2}$

$x=e^{-\frac{1}{2}}$

ここで，$f''(x)=2\log x+2x\cdot\frac{1}{x}+1$

$=2\log x+3$

であるから，$x=e^{-\frac{1}{2}}$を代入して

$f''(e^{-\frac{1}{2}})=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3=2>0$

また，$f(e^{-\frac{1}{2}})=e^{-1}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2e}$である

から，$x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$のとき極小値$-\frac{1}{2e}$をとる。極大値はない。

(2)　$f'(x)=1-2\sin 2x$

よって，$f'(x)=0$となるとき，$\sin 2x=\frac{1}{2}$

$0\leqq x<\pi$より，$0\leqq 2x<2\pi$であるから

$2x=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$　　$x=\frac{\pi}{12}$，$\frac{5}{12}\pi$

ここで，$f''(x)=-4\cos 2x$であるから

$x=\frac{\pi}{12}$を代入して

$f''\left(\frac{\pi}{12}\right)=-4\cos\frac{\pi}{6}=-4\times\frac{\sqrt{3}}{2}<0$

$x=\frac{5}{12}\pi$を代入して

$f''\left(\frac{5}{12}\pi\right)=-4\cos\frac{5}{6}\pi$

$=-4\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>0$

また，$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{5}{12}\pi\right)=\frac{5}{12}\pi+\cos\frac{5}{6}\pi$

$=\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

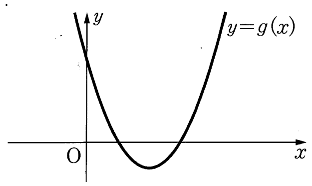
であるから，$x=\frac{\pi}{12}$のとき極大値$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$x=\frac{5}{12}\pi$のとき極小値$\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$をとる。

3　(1)　**$a<-4$**　　(2)　**$a>0$**

解説 (1)　$f'(x)=1-\frac{a}{x^2}+\frac{a}{x}=\frac{x^2+ax-a}{x^2}$

$g(x)=x^2+ax-a$とおくと，$f(x)$が極大値と極小値をもつための条件は，$g(x)=0$が$x>0$の範囲に異なる2つの実数解をもつことである。



$g(x)=0$の判別式をDとすると

$D=a^2+4a=a(a+4)>0$

$a<-4$，$0<a$　……①

$y=g(x)$の軸は$x=-\frac{a}{2}$であるから

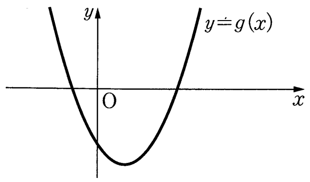
$-\frac{a}{2}>0$より，$a<0$　……②

$g(0)=-a>0$より，$a<0$　……③

①，②，③より求める範囲は

$a<-4$

(2)　(1)の$g(x)$について，$g(x)=0$が$x>0$の範囲にただ1つの実数解をもつことが必要である。



$g(0)=-a<0$より，$a>0$

このとき，$g(x)=0$の正の解を$x=\alpha$とすると，$f'(x)$は$x=\alpha$で$-\to+$と符号変化し，

$f(x)$ は $x=\alpha$ で極小値をとるから題意を満たす。

4 $\left(2,\ 5\right),\ \left(-\frac{3}{2},\ -16\right),\ \left(-\frac{1}{3},\ -9\right)$

解説 $f'(x)=\dfrac{18(x^2+x+1)-(18x-1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$=\dfrac{-18x^2+2x+19}{(x^2+x+1)^2}$

$f''(x)$

$=\dfrac{1}{(x^2+x+1)^4}\{(-36x+2)(x^2+x+1)^2$

$-(-18x^2+2x+19)\cdot 2(2x+1)(x^2+x+1)\}$

$=\dfrac{(-36x+2)(x^2+x+1)-2(-18x^2+2x+19)(2x+1)}{(x^2+x+1)^3}$

$=\dfrac{36x^3-6x^2-114x-36}{(x^2+x+1)^3}$

$=\dfrac{6(6x^3-x^2-19x-6)}{(x^2+x+1)^3}$

$=\dfrac{6(x-2)(6x^2+11x+3)}{(x^2+x+1)^3}$

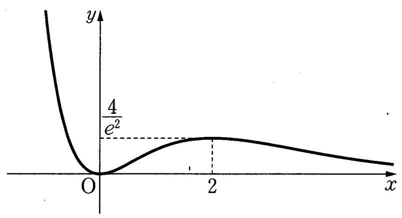
$=\dfrac{6(x-2)(2x+3)(3x+1)}{(x^2+x+1)^3}$

$f(2)=5,\ f\left(-\frac{3}{2}\right)=-16,\ f\left(-\frac{1}{3}\right)=-9$

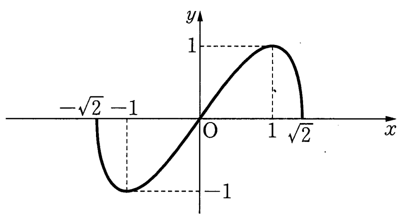
よって変曲点は，$(2,\ 5),\ \left(-\frac{3}{2},\ -16\right)$,

$\left(-\frac{1}{3},\ -9\right)$

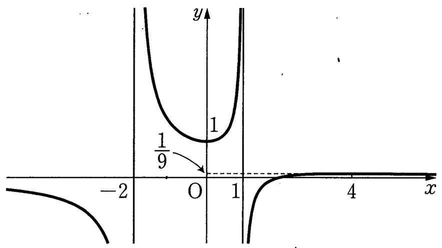
5 (1)



(2)



(3)



解説 (1) $y'=(2x-x^2)e^{-x}$

$=-x(x-2)e^{-x}$

増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$ であるから，x 軸はこの曲線の漸近線である。また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^2e^{-x}=\infty$

(2) 定義域は，$2-x^2\geqq 0$ より

$-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$

$y'=\sqrt{2-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}=\dfrac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}}$

$=\dfrac{-2(x+1)(x-1)}{\sqrt{2-x^2}}$

増減表は次のようになる。

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'	/	$-$	0	$+$	0	$-$	/
y	0	↘	-1	↗	1	↘	0

(3) $y'=\dfrac{(x^2+x-2)-(x-2)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$

$=\dfrac{-x^2+4x}{(x+2)^2(x-1)^2}$

$=-\dfrac{x(x-4)}{(x+2)^2(x-1)^2}$

増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
y'	$-$	/	$-$	0	$+$	/	$+$	0	$-$
y	↘	/	↘	1	↗	/	↗	$\frac{1}{9}$	↘

$\displaystyle\lim_{x\to-2+0}\frac{x-2}{x^2+x-2}=\infty,$

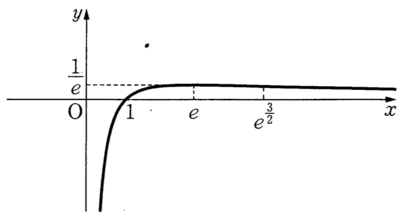
$\displaystyle\lim_{x\to-2-0}\frac{x-2}{x^2+x-2}=-\infty,$

$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x-2}{x^2+x-2}=-\infty,$

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x-2}{x^2+x-2}=\infty$

であるから，直線 $x=-2$，$x=1$ は，この曲線の漸近線である。

6



解説 $y'=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$y''=\dfrac{-x-2x(1-\log x)}{x^4}=\dfrac{2\log x-3}{x^3}$

増減と凹凸の表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
y'	/	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	/	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	/	↗(上に凸)	$\frac{1}{e}$	↘(上に凸)	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↘(下に凸)

$x=e$ のとき，極大値 $\dfrac{1}{e}$

変曲点は，$\left(e^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であるから，x 軸はこの曲線の漸近線である。

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty$

P.101 入試問題演習

STEP 1

1 (1) **極大値　なし，極小値　$2e$**

(2) **極大値　$1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}$，極小値　$-1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}$**

(3) **極大値　$\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi}$，極小値　$-\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}}$**

解説 (1) $f'(x)=e^{x+2}-e^{-x}$

$=e^{-x}(e^{2x+2}-1)$

$=e^{-x}(e^{x+1}+1)(e^{x+1}-1)$

$e^{-x}>0$，$e^{x+1}+1>1$ より，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$2e$	↗

極小値は，$f(-1)=2e$，極大値はない。

(2) $f'(x)=3\sin^2x\cos x-3\sin x\cos^2x$

$=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$

$=3\sqrt{2}\sin x\cos x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$f(x)$ は周期 2π の周期関数であるから，$0\leqq x\leqq 2\pi$ で考えれば十分である。この範囲での増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

極大値は，$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(2\pi)=1$

$f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

極小値は，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(\pi)=f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-1$

(3) $f'(x)=2\pi e^{\pi x}\{\sin(\pi x)+\cos(\pi x)\}$

$=2\sqrt{2}\pi e^{\pi x}\sin\left\{\pi\left(x+\frac{1}{4}\right)\right\}$

増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$	0	$-$	/
$f(x)$	/	↘	極小	↗	極大	↘	/

極大値は，$f\left(\frac{3}{4}\right)=\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi}$

極小値は，$f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}}$

2 **$a=2$，$x=\log(2-\sqrt{3})$ で極大値を，$x=\log(2+\sqrt{3})$ で極小値をとる。**

解説 $f'(x)=2e^{2x}-4ae^x+2$

$=2(e^{2x}-2ae^x+1)$

$e^x=t$ とおくと，$t>0$ であるから

t の 2 次方程式 $t^2-2at+1=0$ ……① が異なる 2 つの正の解をもつ必要がある。

$a^2-1>0$ かつ $a>0$ より

$a>1$ ……②

このとき，①の 2 つの解を α，β $(0<\alpha<\beta)$ とすると，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$\log\alpha$	$\cdots$	$\log\beta$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

題意より

$f(\log\alpha)+f(\log\beta)=-6$

$(\alpha^2-4a\alpha+2\log\alpha+3a)$

$+(\beta^2-4a\beta+2\log\beta+3a)=-6$

$\alpha^2+\beta^2-4a(\alpha+\beta)+2\log\alpha\beta+6a=-6$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-4a(\alpha+\beta)+2\log\alpha\beta+6a$

$=-6$

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=1$

よって

$4a^2-2-8a^2+6a=-6$

$4a^2-6a-4=0$

$2a^2-3a-2=0$

$(a-2)(2a+1)=0$

ゆえに，②より，$a=2$

このとき，①の解は，$t=2\pm\sqrt{3}$

よって

極大値をとる x の値は，$x=\log(2-\sqrt{3})$

極小値をとる x の値は，$x=\log(2+\sqrt{3})$

3 **$b=3$，$c=-45$，$d=81$**

極大値　256，極小値　0

解説 $f'(x)=3x^2+2bx+c$

$f''(x)=6x+2b$

$f''(-1)=-6+2b=0$ より，$b=3$

よって，$f(x)=x^3+3x^2+cx+d$ と表される。

$f(3)=3c+d+54=0$ ……①

$f(-1)=-c+d+2=128$ ……②

①−② より

$4c=-180 \quad c=-45$

②に代入して

$d+47=128 \quad d=81$

このとき，$f(x)=x^3+3x^2-45x+81$

$f'(x)=3x^2+6x-45$
$=3(x^2+2x-15)$
$=3(x+5)(x-3)$

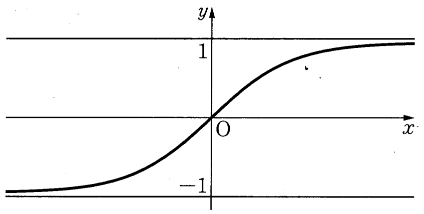
増減表は次のようになる。

x	…	-5	…	3	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	256	↘	0	↗

極大値は，$f(-5)=256$

極小値は，$f(3)=0$

4 (1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$



(2) $\alpha=\frac{1}{2}\log 3$, $f'(\alpha)=\frac{3}{4}$

解説 (1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1$

よって，直線 $y=1$，$y=-1$ は，この曲線の漸近線である。

また，$f'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$

$=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

よって，$f'(x)>0$ がつねに成り立ち，$f(x)$ は単調増加である。

また，$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$

$=-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$=-f(x)$

であり，$f(x)$ のグラフは原点について対称になるから，グラフは解答のようになる。

(2) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{2}$ より

$2(e^x-e^{-x})=e^x+e^{-x}$

$e^x-3e^{-x}=0$

$e^{-x}(e^{2x}-3)=0$

よって，$e^{-x}>0$，$e^x>0$ より，$e^x=\sqrt{3}$

ゆえに，$x=\alpha=\log\sqrt{3}=\frac{1}{2}\log 3$

$$f'(\alpha)=\frac{4}{\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{4}{3+2+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

STEP 2

1 (1) $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$

(2) $k\leqq 2$，(極小値)$\leqq\frac{1}{2}-\log 2$

解説 (1) $f'(x)=\log x+1-\log(1-x)-1+k(1-2x)$
$=\log x-\log(1-x)+k(1-2x)$

よって，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\log\frac{1}{2}-\log\frac{1}{2}=0$

(2) $f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-2k\geqq 0$ より

$\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\geqq 2k$

$g(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$ とおくと

$g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$g'(x)$	／	$-$	0	$+$	／
$g(x)$	／	↘	極小	↗	／

上の増減表より

$g(x)\geqq g\left(\frac{1}{2}\right)=4$ が成り立つ。

したがって k の範囲は，$4\geqq 2k$ より

$k\leqq 2$

$f''(x)\geqq 0$ がつねに成り立つことから，$f'(x)$ は単調増加であり，(1)より $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ であるから，$f'(x)$ は $x=\frac{1}{2}$ で負から正に符号を変え，極小値は $f\left(\frac{1}{2}\right)$ である。

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{k}{4}$

$=\frac{k}{4}-\log 2\leqq\frac{1}{2}-\log 2$

第21講 微分のいろいろな応用(1)

P.103〜P.104 **類題**

1 (1) 最大値 108，最小値 −128

(2) 最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{16}$，最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{16}$

解説 (1) $f'(x)=3x^3-6x^2-24x$
$=3x(x+2)(x-4)$

増減表は次のようになる。

x	-3	…	-2	…	0	…	4	…	6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{27}{4}$	↘	-20	↗	0	↘	-128	↗	108

よって，最大値は，$f(6)=108$

最小値は，$f(4)=-128$

(2) $f'(x)=3\sin^2x\cos^2x-\sin^4x$
$=\sin^2x(3\cos^2x-\sin^2x)$
$=\sin^2x(4\cos^2x-1)$
$=\sin^2x(2\cos x+1)(2\cos x-1)$

$0\leqq x\leqq\pi$ において，$\sin x=0$，$\cos x=\pm\frac{1}{2}$

を満たす x の値は

$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$

増減表は次のようになる。

x	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{16}$	↗	0

よって，最大値は，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{16}$

最小値は，$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{16}$

2 (1) 最大値 $\frac{2}{3}$，最小値 −2

(2) 最大値 $\frac{7}{4}$，最小値 なし

解説 (1) $f'(x)=\frac{2(x^2+x+1)-2x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$=\frac{2-2x^2}{(x^2+x+1)^2}$

$=-\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)^2}$

増減表は次のようになる。

x	…	-1	…	1	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	$\frac{2}{3}$	↘

また，$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$

であるから

最大値は，$f(1)=\frac{2}{3}$

最小値は，$f(-1)=-2$

(2) 定義域は，$3-x\geqq 0$ より，$x\leqq 3$

$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}+\frac{1}{4}$

$f'(x)=0$ のとき，$\frac{1}{2\sqrt{3-x}}=\frac{1}{4}$

$\sqrt{3-x}=2$

両辺を平方して，$3-x=4$

$x=-1$

増減表は次のようになる。

x	…	-1	…	3
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／
$f(x)$	↗	$\frac{7}{4}$	↘	$\frac{3}{4}$

また，$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}+\frac{1}{4}\right)$

$=-\infty$

であるから

最大値は，$f(-1)=\frac{7}{4}$

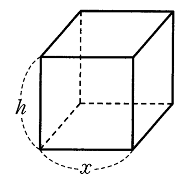
最小値は存在しない。

3 24

解説 底面の正方形の1辺の長さを x，高さを h とすると，底面積は x^2 であるから，題意より

$x^2\cdot h=8$

よって，$h=\frac{8}{x^2}$



$S=2\times x^2+4xh$

$=2x^2+\frac{32}{x}$

$\frac{dS}{dx}=4x-\frac{32}{x^2}$

$=\frac{4(x^3-8)}{x^2}$

$=\frac{4(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}$

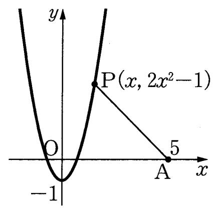
$x>0$ における増減表は次のようになる。

x	0	…	2	…
$\frac{dS}{dx}$	／	$-$	0	$+$
S	／	↘	24	↗

よって，S は $x=2$ のとき，最小値24をとる。

4 $\sqrt{17}$

解説



$\mathrm{P}(x,\ 2x^2-1)$ とすると

$\mathrm{AP}=\sqrt{(x-5)^2+(2x^2-1)^2}$
$=\sqrt{4x^4-3x^2-10x+26}$

$f(x)=4x^4-3x^2-10x+26$ とおくと

$f'(x)=16x^3-6x-10$
$=2(8x^3-3x-5)$
$=2(x-1)(8x^2+8x+5)$

増減表は次のようになる。

x	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	17	↗

よって，$f(x)$ の最小値は，$f(1)=17$
したがって，APの最小値は，$\sqrt{17}$

P.105 演習問題

1 (1) **最大値** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$，**最小値** $-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

(2) **最大値 なし，最小値** $2\sqrt{2}$

(3) **最大値 なし，最小値** $-\dfrac{1}{e}$

(4) **最大値** $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$，**最小値** $-\dfrac{9}{e^3}$

(5) **最大値** $2\sqrt{2}$，**最小値** -2

解説 (1) $y'=\dfrac{x^2+1-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2}$

$y'=0$ の解は，$x=1\pm\sqrt{2}$
増減表は次のようになる。

x	…	$1-\sqrt{2}$	…	$1+\sqrt{2}$	…
y'	−	0	+	0	−
y	↘	極小	↗	極大	↘

また，$\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x^2+1}=0$

極大値は，$x=1+\sqrt{2}$ のとき

$\dfrac{1+\sqrt{2}-1}{(1+\sqrt{2})^2+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}-2}{4}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}>0$

極小値は，$x=1-\sqrt{2}$ のとき

$\dfrac{1-\sqrt{2}-1}{(1-\sqrt{2})^2+1}=\dfrac{-\sqrt{2}-1}{2}$

$=-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}<0$

よって，最大値は，$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

最小値は，$-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

(2) $y'=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}+\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

$=\dfrac{(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x}$

$\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x$
$=1+\sin x\cos x>1$ より，$y'=0$ のとき

$\sin x-\cos x=0\quad x=\dfrac{\pi}{4}$

x	0	…	$\dfrac{\pi}{4}$	…	$\dfrac{\pi}{2}$
y'		−	0	+	
y		↘	$2\sqrt{2}$	↗	

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ における増減表は上のようになり，$x=\dfrac{\pi}{4}$ のときに最小値 $2\sqrt{2}$ をとる。

最大値は存在しない。

(3) $y'=\log x+1$

x	0	…	$\dfrac{1}{e}$	…
y'		−	0	+
y		↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗

増減表は上のようになり，$x=\dfrac{1}{e}$ のときに最小値 $-\dfrac{1}{e}$ をとる。

$\lim_{x\to\infty}x\log x=\infty$ であるから，最大値は存在しない。

(4) $y'=(3-4x)e^{-x}-(3x-2x^2)e^{-x}$
$=(2x^2-7x+3)e^{-x}$
$=(x-3)(2x-1)e^{-x}$

$x\geqq 0$ における増減表は次のようになる。

x	0	…	$\dfrac{1}{2}$	…	3	…
y'		+	0	−	0	+
y	0	↗	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	↘	$-\dfrac{9}{e^3}$	↗

また，$\lim_{x\to\infty}(3x-2x^2)e^{-x}=0$

よって，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$，$x=3$ のとき最小値 $-\dfrac{9}{e^3}$ をとる。

(5) 定義域は $4-x^2\geqq 0$ より，$-2\leqq x\leqq 2$

$y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$y'=0$ のとき，$\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=1$

$x=\sqrt{4-x^2}$ ……①
①の両辺を平方して
$x^2=4-x^2$
$2x^2=4$
$x=\pm\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}$ は①を満たし，$x=-\sqrt{2}$ は①を満たさない。

x	−2	…	$\sqrt{2}$	…	2
y'		+	0	−	
y	−2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

増減表は上のようになり，$x=-2$ のとき最小値 -2，$x=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$ をとる。

2 $\dfrac{4\sqrt{21}}{3}$

解説 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は円周上の点であるから，$x^2+y^2=4$ より，$y^2=4-x^2$ が成り立つ。
また，$y^2\geqq 0$ より，$-2\leqq x\leqq 2$

PA+PB
$=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}$
$=\sqrt{(x-1)^2+4-x^2}+\sqrt{(x+3)^2+4-x^2}$
$=\sqrt{5-2x}+\sqrt{13+6x}$

これを $f(x)$ とおくと

$f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}+\dfrac{3}{\sqrt{13+6x}}$

$=\dfrac{3\sqrt{5-2x}-\sqrt{13+6x}}{\sqrt{(5-2x)(13+6x)}}$

$f'(x)=0$ とおくと
$3\sqrt{5-2x}=\sqrt{13+6x}$ ……①
①の両辺を平方して
$9(5-2x)=13+6x$
$24x=32$
$x=\dfrac{4}{3}$

$x=\dfrac{4}{3}$ は①を満たし，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	−2	…	$\dfrac{4}{3}$	…	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	極大	↘	

最大値は

$f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\sqrt{5-\dfrac{8}{3}}+\sqrt{13+8}$

$=\sqrt{\dfrac{7}{3}}+\sqrt{21}=\dfrac{4\sqrt{21}}{3}$

3 **x の最大値 4，y の最小値 5**

解説 $\dfrac{dx}{dt}=3t^2-3$

$=3(t+1)(t-1)$

よって，$-1\leqq t\leqq 2$ における x の増減表は次のようになる。

t	−1	…	1	…	2
$\dfrac{dx}{dt}$		−	0	+	
x	4	↘	0	↗	4

したがって x は，$t=-1$，2 のとき最大値 4 をとり，x の値の範囲は，$0\leqq x\leqq 4$
次に

$y=\dfrac{(x+1)(x+2)+4}{x+1}$

$=x+2+\dfrac{4}{x+1}$

$\dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$

x	0	…	1	…	4
$\dfrac{dy}{dx}$		−	0	+	
y		↘	5	↗	

$0\leqq x\leqq 4$ における y の増減表は上のようになるから，y は $x=1$ のとき最小値 5 をとる。

(別解)

$y=(x+1)+\dfrac{4}{x+1}+1$

$0\leqq x\leqq 4$ より，$x+1>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$(x+1)+\dfrac{4}{x+1}\geqq 2\sqrt{(x+1)\cdot\dfrac{4}{x+1}}=4$

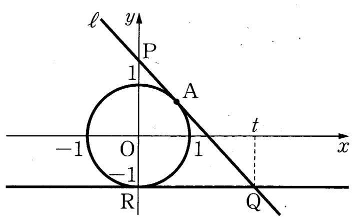
$x+1=\dfrac{4}{x+1}$ より，$(x+1)^2=4$

$0\leqq x\leqq 4$ の範囲では，$x=1$ のときに等号が成り立つから，$x+1+\dfrac{4}{x+1}$ はこのとき最小値 4 をとる。

ゆえに，y の最小値は，$4+1=5$

4 (1) $S=\dfrac{t^3}{t^2-1}$ (2) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

解説 (1)



Q$(t,\ -1)$である。

ℓの傾きをmとすると，ℓは

$y=m(x-t)-1$

$mx-y-mt-1=0$ ……①

①が円Cと接することから

$\dfrac{|-mt-1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$(mt+1)^2=m^2+1$

$(1-t^2)m^2=2mt$

点Aは第1象限の点なので，$m<0,\ t>1$ が成り立つ。

よって，$m=\dfrac{2t}{1-t^2}$

したがってℓは，$y=\dfrac{2t}{1-t^2}x-\dfrac{2t^2}{1-t^2}-1$

$x=0$とおくと

$y=-\dfrac{2t^2}{1-t^2}-1=\dfrac{-2t^2+t^2-1}{1-t^2}$

$=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}$

すなわち，$\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{t^2+1}{t^2-1}\right)$となるから

$S=\dfrac{1}{2}t\left(\dfrac{t^2+1}{t^2-1}+1\right)=\dfrac{t^3}{t^2-1}$

(2) $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{3t^2(t^2-1)-t^3\cdot 2t}{(t^2-1)^2}$

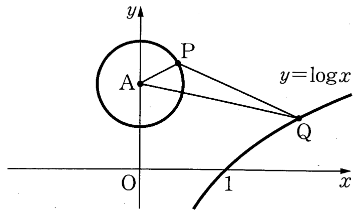
$=\dfrac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}$

t	1	…	$\sqrt{3}$	…
$\dfrac{dS}{dt}$		$-$	0	$+$
S		↘	極小	↗

$t>1$におけるSの増減表は上のようになり，$t=\sqrt{3}$のとき最小値$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$をとる。

5 $\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$

解説



A$(0,\ 1)$とする。

点Qを固定すると

$\mathrm{PQ}\geqq\mathrm{AQ}-\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}-\dfrac{1}{2}$

ここで等号は，点Pが線分AQと円との交点のときに成り立つから，PQの最小値は

$\mathrm{AQ}-\dfrac{1}{2}$

Q$(x,\ \log x)$とおく。ただし，$x>0$

$\mathrm{AQ}^2=x^2+(\log x-1)^2$

$f(x)=x^2+(\log x-1)^2$とおくと

$f'(x)=2x+2(\log x-1)\cdot\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{2(x^2+\log x-1)}{x}$

$g(x)=x^2+\log x-1$とおくと

$g'(x)=2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2+1}{x}>0$

よって，$g(x)$は単調増加であり，かつ，$g(1)=0$

すなわち，$g(x)=0$は$x>0$において，$x=1$をただ1つの解としてもち，$x=1$の前後で$g(x)$の符号は負から正に変わる。

x	0	…	1	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	2	↗

$f(x)$の増減表は上のようになり，最小値は，$f(1)=2$

よって，AQの最小値は$\sqrt{2}$であり，PQの最小値は，$\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$

6 $\dfrac{1}{e}$

解説 $f'(x)=(2x-p)e^{-x}-(x^2-px+p)e^{-x}$

$=-\{x^2-(p+2)x+2p\}e^{-x}$

$=-(x-2)(x-p)e^{-x}$

$f(x)$が極値をもつのは，$p\neq 2$のとき。

(i) $p>2$のとき

x	…	2	…	p	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

$f(x)$の増減表は上のようになり，極小値は

$f(2)=(4-p)e^{-2}$

$e^{-2}>0$より，$f(2)$はpに関して単調減少である。よって，$p>2$より

$f(2)=\dfrac{4-p}{e^2}<\dfrac{2}{e^2}$

(ii) $p<2$のとき

x	…	p	…	2	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

$f(x)$の増減表は上のようになり，極小値は

$f(p)=pe^{-p}$

$\dfrac{d}{dp}f(p)=(1-p)e^{-p}$

p	…	1	…	2
$\dfrac{d}{dp}f(p)$	$+$	0	$-$	
$f(p)$	↗	極大	↘	

よって，この範囲で$f(p)$の増減表は上のようになり，$f(p)$の最大値は

$f(1)=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

$\dfrac{2}{e^2}<\dfrac{1}{e}$であるから，(i)，(ii)より，$f(x)$の極小値は$p=1$のとき最大値$\dfrac{1}{e}$をとる。

P.106 **入試問題演習**

STEP 1

1 (1) **最大値** $\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，**最小値** $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\boldsymbol{2e}$ (3) $x=e^{\frac{1}{n}}$ **のとき**，$\dfrac{1}{ne}$

解説 (1) $f'(x)=1-2\cos 2x$

$f'(x)=0$のとき，$\cos 2x=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq 2x\leqq 2\pi$より，$2x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$0\leqq x\leqq\pi$における$f(x)$の増減表は次のようになる。

x	0	…	$\dfrac{\pi}{6}$	…	$\dfrac{5}{6}\pi$	…	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	

$f(0)=0,\ f(\pi)=\pi$であり

$f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}>0$

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\pi$

したがって，最大値は$\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，最小値は$\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $f'(x)=(3x^2+2x+1)e^{-x}$

$-(x^3+x^2+x+3)e^{-x}$

$=-(x^3-2x^2-x+2)e^{-x}$

$=-(x+1)(x-1)(x-2)e^{-x}$

$f(x)$の増減表は次のようになる。

x	…	-1	…	1	…	2	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘

$f(-1)=2e$

$f(2)=17e^{-2}$

ここで，$\dfrac{5}{2}<e<3$より

$5<2e<6,\ \dfrac{17}{9}<17e^{-2}<\dfrac{68}{25}$

$5>\dfrac{68}{25}$が成り立つから，$2e>17e^{-2}$

したがって，$f(x)$の最大値は，$f(-1)=2e$

(3) $f'(x)=\dfrac{1}{x^{2n}}\left(\dfrac{1}{x}\cdot x^n-\log x\cdot nx^{n-1}\right)$

$=\dfrac{1-n\log x}{x^{n+1}}$

x	0	…	$e^{\frac{1}{n}}$	…
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	極大	↘

上の増減表より，$f(x)$の最大値は

$f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\dfrac{1}{ne}$

2 (1) $\boldsymbol{b=1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=0$

(3) $\boldsymbol{-2<a<2}$

最大値 $\dfrac{1}{a+2}$，**最小値** $\dfrac{1}{a-2}$

(4) $\boldsymbol{a=2}$，**最大値** $\dfrac{1}{4}$

解説 (1) $f'(x)=\dfrac{x^2+ax+b-x(2x+a)}{(x^2+ax+b)^2}$

$f'(0)=1$より

$\dfrac{b}{b^2}=1$

$b=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x+a+\dfrac{1}{x}}=0$

(3) $f'(x)=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+ax+1)^2}$

$g(x)=x^2+ax+1$とおく。

$g(x)=0$が異なる2つの実数解$\alpha,\ \beta$

$(\alpha<\beta)$ をもつとき，$a^2-4>0$ より

$a<-2,\ 2<a$

このとき，$f(x)=\dfrac{x}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ となり，$f(x)$ は最大値も最小値ももたない。

$g(x)=0$ が重解をもつとき，$a=\pm2$ であり，重解は $x=\mp1$ （複号同順）

$a=2$ のとき，$f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ で，$\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=-\infty$ であるから，$f(x)$ は最小値をもたない。

$a=-2$ のとき，$f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ で，$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=\infty$ であるから，$f(x)$ は最大値をもたない。

$g(x)=0$ が実数解をもたないとき

$-2<a<2$

このとき，$f'(x)=\dfrac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+ax+1)^2}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって(2)より，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ であり

極大値は，$f(1)=\dfrac{1}{a+2}>0$

極小値は，$f(-1)=\dfrac{1}{a-2}<0$

であるから

最大値は，$f(1)=\dfrac{1}{a+2}$

最小値は，$f(-1)=\dfrac{1}{a-2}$

(4) (3)で調べたように，$f(x)$ が最大値をもち最小値をもたないのは，$a=2$ のときである。

このとき，$f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$

$f'(x)=-\dfrac{x-1}{(x+1)^3}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗	極大	↘

上の増減表と(2)より，$f(x)$ の最大値は

$f(1)=\dfrac{1}{4}$

3 (1) $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{a}x+\log a-1}$　(2) $\boldsymbol{0<a<e}$

(3) $\boldsymbol{\dfrac{2}{e}}$

解説 (1) $y=\log x$ より，$y'=\dfrac{1}{x}$

求める接線の方程式は

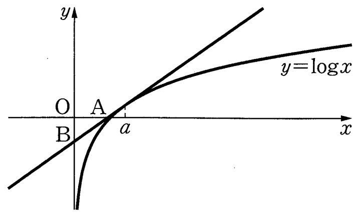
$y-\log a=\dfrac{1}{a}(x-a)$

よって，$y=\dfrac{1}{a}x+\log a-1$

(2) B$(0,\ \log a-1)$ であるから，$\log a-1<0$ より

$\log a<1$

よって，$0<a<e$



(3) A$(a-a\log a,\ 0)$

$S(a)=\dfrac{1}{2}(a-a\log a)(1-\log a)$

$=\dfrac{a}{2}(1-\log a)^2$

$S'(a)=\dfrac{1}{2}(1-\log a)^2-(1-\log a)$

$=\dfrac{1}{2}(1-\log a)\{(1-\log a)-2\}$

$=\dfrac{1}{2}(\log a-1)(\log a+1)$

a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$	e
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	極大	↘	

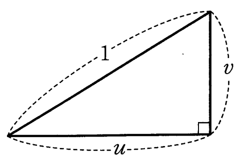
$0<a<e$ における上の増減表により，$S(a)$ の最大値は，$S\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{2}{e}$

STEP 2

1 (1) $\boldsymbol{y=1+\sqrt{1+4x}}$

(2) $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\leqq\dfrac{4x}{y}-\sqrt{x}<0}$

解説 (1)



直角をはさむ 2 辺の長さを u，v とおくと

$u^2+v^2=1$ ……①

$x=\dfrac{1}{2}uv$ ……②

$y=u+v+1$ ……③

③より，$u+v=y-1$

$(u+v)^2=(y-1)^2$

$u^2+2uv+v^2=(y-1)^2$

よって，①，②より

$1+4x=(y-1)^2$

したがって，$y>1$ より

$y-1=\sqrt{1+4x}$

$y=1+\sqrt{1+4x}$

(2) $\dfrac{4x}{y}-\sqrt{x}=\dfrac{4x}{1+\sqrt{1+4x}}-\sqrt{x}$

$=\dfrac{4x(1-\sqrt{1+4x})}{1-(1+4x)}-\sqrt{x}$

$=\sqrt{1+4x}-1-\sqrt{x}$

これを $f(x)$ とおくと

$f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1+4x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$ とおくと

$4\sqrt{x}=\sqrt{1+4x}$　$16x=1+4x$　$x=\dfrac{1}{12}$

また，①，②より

$(u-v)^2=1-4x\geqq0,\ x=\dfrac{1}{2}uv>0$

よって，$0<x\leqq\dfrac{1}{4}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{12}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{4}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗	

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=0$

$f\left(\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1$

$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\sqrt{2}-\dfrac{3}{2}<0$

ゆえに，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\leqq f(x)<0$

第22講　微分のいろいろな応用(2)

P.108〜P.109 **類題**

1 2

解説 $f'(x)=\dfrac{2}{x^2}$

$\dfrac{f(4)-f(1)}{3}=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}+2\right)=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{2}{c^2}=\dfrac{1}{2}$ より，$c^2=4$

よって，$1<c<4$ より，$c=2$

2 $\boldsymbol{a<-\dfrac{1}{e}}$ **のとき，0 個**

$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{e}}$，$\boldsymbol{a\geqq0}$ **のとき，1 個**

$\boldsymbol{-\dfrac{1}{e}<a<0}$ **のとき，2 個**

解説 与えられた方程式を変形すると

$x\log x=a$

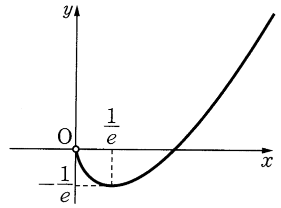
$f(x)=x\log x$ とおくと，$f'(x)=\log x+1$

よって，増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

よって，グラフは下のようになる。



したがって，実数解の個数は

$a<-\dfrac{1}{e}$ のとき，0 個

$a=-\dfrac{1}{e}$，$a\geqq0$ のとき，1 個

$-\dfrac{1}{e}<a<0$ のとき，2 個

3 $\boldsymbol{g(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{1}{6}x^3\right)}$ **とおくと**

$\boldsymbol{g'(x)=\cos x-\left(1-\dfrac{1}{2}x^2\right)}$

例題 3 の結果より，$\boldsymbol{x>0}$ において $\boldsymbol{\cos x>1-\dfrac{1}{2}x^2}$ であるから，$\boldsymbol{g'(x)>0}$ で，$\boldsymbol{g(x)}$ も単調増加である。

よって，この範囲で，$g(x)>g(0)=0$

すなわち，$\sin x>x-\frac{1}{6}x^3$

4 $t=\log 2$

解説 $\frac{dx}{dt}=e^t-1$，$\frac{dy}{dt}=e^t-3$ より，Pの速度ベクトルを $\vec{v}$ とすると

$$|\vec{v}|^2=(e^t-1)^2+(e^t-3)^2$$
$$=e^{2t}-2e^t+1+e^{2t}-6e^t+9$$
$$=2(e^t-2)^2+2$$

であり，$e^t=2$ すなわち，$t=\log 2$ のとき，$|\vec{v}|^2$ が，つまり $|\vec{v}|$ が最小となる。

5 (1) $1+\frac{1}{2}x$ (2) 2.01

解説 (1) $f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt[4]{(2x+1)^3}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x+1)^3}}$ より

$f'(0)=\frac{1}{2}$

したがって，$x=0$ の近くでの1次近似式は

$f(x)\fallingdotseq f(0)+\frac{1}{2}x=1+\frac{1}{2}x$

(2) $\sqrt[4]{16.4}=\sqrt[4]{16\left(1+\frac{0.4}{16}\right)}=2\sqrt[4]{1+\frac{1}{40}}$

$=2\sqrt[4]{2\cdot\frac{1}{80}+1}$

$\fallingdotseq 2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{80}\right)=2\left(1+\frac{1}{160}\right)=2.0125$

すなわち，求める近似値は，2.01

P.110 演習問題

1 $c=\frac{a+b}{2}$

解説 $f'(x)=2px+q$

$f(b)-f(a)=(pb^2+qb+r)-(pa^2+qa+r)$
$=p(b^2-a^2)+q(b-a)$
$=p(b+a)(b-a)+q(b-a)$

よって，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=p(b+a)+q$

$f(x)$ は2次関数で，$p\neq 0$ であるから

$2pc+q=p(b+a)+q$ より

$c=\frac{a+b}{2}$

2 $k<-2$，$0<k$ のとき，2個
$k=-2$ のとき，1個
$-2<k\leqq 0$ のとき，0個

解説 $f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}$ とおくと

$f'(x)=-\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}$

$=-\frac{4(x-2)}{(x-3)^2(x-1)^2}$

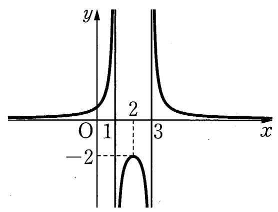
また，$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$，$\lim_{x\to1+0}f(x)=-\infty$，

$\lim_{x\to1-0}f(x)=\infty$，$\lim_{x\to3+0}f(x)=\infty$，

$\lim_{x\to3-0}f(x)=-\infty$

よって，増減表とグラフは次のようになる。

x	…	1	…	2	…	3	…
$f'(x)$	+	／	+	0	−	／	−
$f(x)$	↗	／	↗	−2	↘	／	↘



与えられた方程式は $f(x)=k$ と同値であるから，解の個数は

$k<-2$，$0<k$ のとき，2個
$k=-2$ のとき，1個
$-2<k\leqq 0$ のとき，0個

3 (1) $f(x)=x^2+\sin x-x\cos x$ とおくと

$f'(x)=2x+\cos x-\cos x+x\sin x$
$=x(2+\sin x)$

$x\geqq 0$ において $f'(x)\geqq 0$ であるから，この範囲で

$f(x)\geqq f(0)=0$

すなわち，$x\cos x\leqq x^2+\sin x$ が成り立つ。

(2) $f(x)=\log(1-x)+\frac{x}{1+x}$ とおくと

$f'(x)=-\frac{1}{1-x}+\frac{1+x-x}{(1+x)^2}$

$=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x+1)^2}$

$=\frac{x(x+3)}{(x-1)(x+1)^2}$

よって，$0<x<1$ において，$f'(x)<0$ であるから，この範囲で

$f(x)<f(0)=0$

すなわち，$\log(1-x)+\frac{x}{1+x}<0$ が成り立つ。

4 $f(x)=\log x$ とおくと，$f'(x)=\frac{1}{x}$

$a>0$ とすると，平均値の定理より

$\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=\frac{1}{c}$，$a<c<a+1$

を満たす c が存在する。

このとき，$\frac{1}{a+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$ であるから

$\frac{1}{a+1}<\log(a+1)-\log a<\frac{1}{a}$

a は任意の正の数であるから，題意の不等式が成り立つことが示された。

(別解)

$f(x)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}$ とおくと

$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}$

よって，$x>0$ において $f'(x)<0$ となるから，$f(x)$ は単調減少関数である。

また，$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\log\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=0$

よって，$f(x)>0$ が成り立つ。

次に，$g(x)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x}$ とおくと

$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

$=\frac{1}{x^2(x+1)}$

よって，$x>0$ において $g'(x)>0$ となるから，$g(x)$ は単調増加関数である。

また，$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\log\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}\right)=0$

よって，$g(x)<0$ が成り立つ。

以上より，$\frac{1}{x+1}<\log(x+1)-\log x<\frac{1}{x}$ が成り立つ。よって，$a>0$ を満たす任意の定数 a に対して，与不等式が成り立つ。

5 (1) $\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$ (2) $e^t(\sin t+\cos t)$

解説 (1) $\frac{dx}{dt}=\frac{t^2+1-t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$

(2) $\frac{dx}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t$
$=e^t(\sin t+\cos t)$

6 速度ベクトル
$(\cos(\log t)-\sin(\log t),\ \sin(\log t)+\cos(\log t))$
速さ $\sqrt{2}$
加速度ベクトル
$\left(-\frac{\sin(\log t)+\cos(\log t)}{t},\ \frac{\cos(\log t)-\sin(\log t)}{t}\right)$
加速度ベクトルの大きさ $\frac{\sqrt{2}}{t}$

解説 $\frac{dx}{dt}=\cos(\log t)-t\sin(\log t)\cdot\frac{1}{t}$
$=\cos(\log t)-\sin(\log t)$

$\frac{dy}{dt}=\sin(\log t)+t\cos(\log t)\cdot\frac{1}{t}$
$=\sin(\log t)+\cos(\log t)$

よって，速度ベクトルは
$\vec{v}(t)$
$=(\cos(\log t)-\sin(\log t),\ \sin(\log t)+\cos(\log t))$

これより
$|\vec{v}(t)|^2$
$=\{\cos(\log t)-\sin(\log t)\}^2$
$\quad+\{\sin(\log t)+\cos(\log t)\}^2$
$=2\{\cos^2(\log t)+\sin^2(\log t)\}$
$=2$

ゆえに，$|\vec{v}(t)|=\sqrt{2}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\sin(\log t)\cdot\frac{1}{t}-\cos(\log t)\cdot\frac{1}{t}$

$=-\frac{\sin(\log t)+\cos(\log t)}{t}$

$\frac{d^2y}{dt^2}=\cos(\log t)\cdot\frac{1}{t}-\sin(\log t)\cdot\frac{1}{t}$

$=\frac{\cos(\log t)-\sin(\log t)}{t}$

よって，加速度ベクトルは
$\vec{\alpha}(t)$
$=\left(-\frac{\sin(\log t)+\cos(\log t)}{t},\ \frac{\cos(\log t)-\sin(\log t)}{t}\right)$

これより

$|\vec{\alpha}(t)|^2=\frac{2}{t^2}\{\sin^2(\log t)+\cos^2(\log t)\}$

$=\frac{2}{t^2}$

よって，$t>0$ より，$|\vec{\alpha}(t)|=\frac{\sqrt{2}}{t}$

7 1.006

解説 $f(x)=(1+x)^{30}$ とおくと，$f'(x)=30(1+x)^{29}$

よって，$f'(0)=30$ であるから，$x\fallingdotseq 0$ のとき
$f(x)\fallingdotseq 1+30x$

したがって，$1.0002^{30}=f(0.0002)$
$\fallingdotseq 1+30\cdot 0.0002$
$=1.006$

P.111 入試問題演習

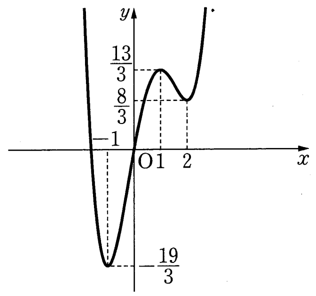
STEP 1

1 $k=\frac{13}{3}$，$\frac{8}{3}$

解説 $y'=4x^3-8x^2-4x+8$
$=4(x^3-2x^2-x+2)$
$=4(x-1)(x^2-x-2)$
$=4(x-1)(x+1)(x-2)$

したがって，増減表とグラフは次のようになる。

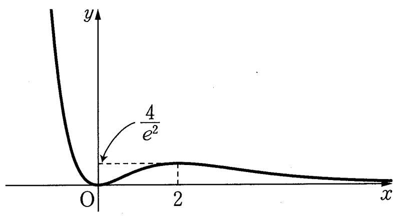
x	…	−1	…	1	…	2	…
y'	−	0	+	0	−	0	+
y	↘	$-\frac{19}{3}$	↗	$\frac{13}{3}$	↘	$\frac{8}{3}$	↗



グラフより，求める k の値は

$k=\frac{13}{3},\ \frac{8}{3}$

2 (1)



(2) $a<0,\ 0<a<3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2}<a$

解説 (1) $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$

$=-x(x-2)e^{-x}$

x	…	0	…	2	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘

上の増減表と，$\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$ より，グラフは解答のようになる。

(2) $x=t$ における $y=f(x)$ の接線の方程式は

$y-t^2e^{-t}=-t(t-2)e^{-t}(x-t)$ ……①

①が点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ を通るとき

$-t^2e^{-t}=-t(t-2)e^{-t}(a-t)$

$e^{-t}>0$ より，$t^2=t(t-2)(a-t)$

$t\{t^2-(a+1)t+2a\}=0$ ……②

②が異なる3つの実数解をもつことが条件で，それは

$t^2-(a+1)t+2a=0$ ……③

が $t\neq0$ を満たす異なる2つの実数解をもつことと同値である。

③の判別式を D とすると

$D=(a+1)^2-8a>0$

$a^2-6a+1>0$

よって，$a<3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2}<a$

③が $t=0$ を解にもつとき，$a=0$

以上より，求める範囲は

$a<0,\ 0<a<3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2}<a$

3 (1) $f'(x)=e^x-\frac{x^2}{2},\ f''(x)=e^x-x$

$f'''(x)=e^x-1$

(2) $x\geqq0$ のとき，$f'''(x)\geqq0$ であるから，$f''(x)$ は単調増加関数である。

よって，この範囲で，$f''(x)\geqq f''(0)=1$

したがって，$f'(x)$ も単調増加関数で

$f'(x)\geqq f'(0)=1$

よって，$f(x)$ も単調増加関数で

$f(x)\geqq f(0)=1$

すなわち，$f(x)>0$ が成り立つから，$e^x>\frac{x^3}{6}$ が成り立つ。

(3) $0<a<\frac{e^2}{4}$ のとき，0個

$a=\frac{e^2}{4}$ のとき，1個

$a>\frac{e^2}{4}$ のとき，2個

解説 (1) $f'(x)=e^x-\frac{3x^2}{6}$

$=e^x-\frac{x^2}{2}$

$f''(x)=e^x-\frac{2x}{2}$

$=e^x-x$

$f'''(x)=e^x-1$

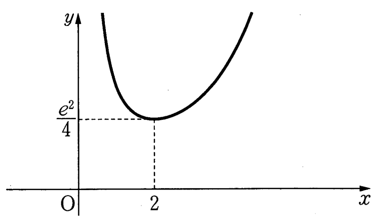
(3) $g(x)=\frac{e^x}{x^2}$ とおくと

$g'(x)=\frac{e^xx^2-e^x\cdot2x}{x^4}$

$=\frac{(x-2)e^x}{x^3}$

よって，$g(x)$ の $x>0$ における増減表とグラフは次のようになる。

x	0	…	2	…
$g'(x)$		−	0	+
$g(x)$		↘	$\frac{e^2}{4}$	↗



(2)より $x>0$ において $\frac{e^x}{x^2}>\frac{x}{6}$ であるから

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\infty$

また，$\lim_{x\to+0}\frac{e^x}{x^2}=\infty$

よって，グラフより，$f(x)=a$ を満たす x の個数は

$0<a<\frac{e^2}{4}$ のとき，0個

$a=\frac{e^2}{4}$ のとき，1個

$a>\frac{e^2}{4}$ のとき，2個

(注)

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\infty$ であることは，通常は証明なしに用いてもよい。

ただし，本問のようにこれを証明するための誘導がついているときには，証明をしておくべきである。

4 $f(x)=\log(\log x)$ とおくと

$f'(x)=\frac{(\log x)'}{\log x}=\frac{1}{x\log x}$

平均値の定理より，$\frac{f(q)-f(p)}{q-p}=f'(c)$,

$p<c<q$ を満たす c が存在する。

$c>p\geqq e$ より

$f'(c)=\frac{1}{c\log c}<\frac{1}{e\log e}=\frac{1}{e}$

よって，$\frac{f(q)-f(p)}{q-p}<\frac{1}{e}$

すなわち，$\frac{\log(\log q)-\log(\log p)}{q-p}<\frac{1}{e}$

したがって，$q-p>0$ であるから

$\log(\log q)-\log(\log p)<\frac{q-p}{e}$

が成り立つ。

5 $t=\frac{c}{2b}$，最小値 $|a|$

解説 $\frac{dx}{dt}=a,\ \frac{dy}{dt}=-2bt+c$

より，速度ベクトルを $\vec{v}$ とすると

$|\vec{v}|^2=a^2+(-2bt+c)^2$

$=4b^2\left(t-\frac{c}{2b}\right)^2+a^2$

よって，$|\vec{v}|^2$ は $t=\frac{c}{2b}$ のとき最小値 a^2 をとるから，$|\vec{v}|$ はこのときに最小値 $|a|$ をとる。

STEP 2

1 0

解説 $f(x)=\sin\sqrt{x}$ とおくと，$f'(x)=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

$c>0$ のとき，x を定数とみなすと，平均値の定理より

$\frac{\sin\sqrt{x+c}-\sin\sqrt{x}}{c}=\frac{\cos\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$,

$x<a<x+c$

を満たす a が存在する。

$x\to\infty$ のとき，$a\to\infty$ となり，$|\cos\sqrt{a}|\leqq1$

より，$\lim_{a\to\infty}\frac{\cos\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}=0$ であるから

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\sqrt{x+c}-\sin\sqrt{x}}{c}=0$

すなわち，$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+c}-\sin\sqrt{x})=0$

$c<0$ のときも同様にして

$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+c}-\sin\sqrt{x})=0$

よって，求める極限値は0