第23講　不定積分

P.113~P.114　類題

1 (1) $-\frac{1}{4x^4}+C$　(2) $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$

(3) $\frac{3^{x+1}}{\log 3}+C$

解説 (1) $\int\frac{dx}{x^5}=\int x^{-5}dx=-\frac{1}{4}x^{-4}+C=-\frac{1}{4x^4}+C$

(2) $\int\sqrt[3]{x^2}\,dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$

(3) $\int 3^{x+1}dx=3\int 3^x dx$

$=3\cdot\frac{3^x}{\log 3}+C$

$=\frac{3^{x+1}}{\log 3}+C$

2 (1) $\frac{4}{135}(3x-4)(9x+8)\sqrt{3x-4}+C$

(2) $\log(x^2-x+3)+C$

解説 (1) $3x-4=t$ とおくと，$x=\frac{t+4}{3}$，$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$

$\int 2x\sqrt{3x-4}\,dx$

$=\int\frac{2(t+4)}{3}\cdot\sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}dt$

$=\frac{2}{9}\int(t\sqrt{t}+4\sqrt{t})dt$

$=\frac{2}{9}\int(t^{\frac{3}{2}}+4t^{\frac{1}{2}})dt$

$=\frac{2}{9}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)+C$

$=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{5}t^2\sqrt{t}+\frac{4}{3}t\sqrt{t}\right)+C$

$=\frac{4}{9}\cdot\frac{t\sqrt{t}}{15}(3t+20)+C$

$=\frac{4}{135}(3x-4)\sqrt{3x-4}\cdot\{3(3x-4)+20\}+C$

$=\frac{4}{135}(3x-4)(9x+8)\sqrt{3x-4}+C$

(2) $\int\frac{2x-1}{x^2-x+3}dx$

$=\int\frac{(x^2-x+3)'}{x^2-x+3}dx$

$=\log|x^2-x+3|+C$

$=\log(x^2-x+3)+C$

3 $\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3+C$

解説 $\int x^2\log x\,dx$

$=\int\left(\frac{1}{3}x^3\right)'\log x\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3\log x-\int\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx$

$=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{3}\int x^2dx$

$=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3+C$

4 (1) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$

(2) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$

解説 (1) $\int\frac{1}{x^2+2x-3}dx=\int\frac{1}{(x-1)(x+3)}dx$

$\frac{1}{(x-1)(x+3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}$ とおくと

$1=a(x+3)+b(x-1)$

$(a+b)x+3a-b=1$

よって，$a+b=0$，$3a-b=1$ より

$a=\frac{1}{4}$，$b=-\frac{1}{4}$

したがって

$\int\frac{1}{(x-1)(x+3)}dx$

$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$=\frac{1}{4}(\log|x-1|-\log|x+3|)+C$

$=\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$

(2) $\int\sin^2 2x\,dx$

$=\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$

P.115　演習問題

1 (1) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$　(2) $\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x+C$

(3) $e^x-\frac{1}{2^x\log 2}+C$

(4) $\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{3}{2}e^{2x}+3e^x+x+C$

解説 (1) $\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{3}}dx$

$=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$

$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$

(2) $\int(\sqrt{x}-1)^2dx$

$=\int(x-2x^{\frac{1}{2}}+1)dx$

$=\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+C$

$=\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x+C$

(3) $\int\left(e^x+\frac{1}{2^x}\right)dx$

$=e^x+\int\left(\frac{1}{2}\right)^x dx$

$=e^x+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}+C$

$=e^x-\frac{1}{2^x\log 2}+C$

(4) $\int(e^x+1)^3dx$

$=\int(e^{3x}+3e^{2x}+3e^x+1)dx$

$=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{3}{2}e^{2x}+3e^x+x+C$

2 (1) $\frac{1}{8}(2x-1)^4+C$

(2) $\frac{2}{135}(3x+1)(9x-2)\sqrt{3x+1}+C$

(3) $\frac{1}{3}\sin^3 x+C$　(4) $\frac{1}{5}(e^x-5)^5+C$

(5) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

解説 (1) $2x-1=t$ とおくと，$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$

$\int(2x-1)^3dx=\int t^3\cdot\frac{1}{2}dt$

$=\frac{1}{8}t^4+C$

$=\frac{1}{8}(2x-1)^4+C$

(2) $3x+1=t$ とおくと

$x=\frac{t-1}{3}$，$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$

$\int x\sqrt{3x+1}\,dx$

$=\int\frac{t-1}{3}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}dt$

$=\frac{1}{9}\int(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}})dt$

$=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)+C$

$=\frac{1}{9}\cdot\frac{2t\sqrt{t}}{15}(3t-5)+C$

$=\frac{2}{135}(3x+1)\sqrt{3x+1}\cdot\{3(3x+1)-5\}+C$

$=\frac{2}{135}(3x+1)(9x-2)\sqrt{3x+1}+C$

(別解)

$\sqrt{3x+1}=t$ とおくと，$3x+1=t^2$ より

$x=\frac{t^2-1}{3}$，$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{3}t$

$\int x\sqrt{3x+1}\,dx$

$=\int\frac{t^2-1}{3}\cdot t\cdot\frac{2}{3}t\,dt$

$=\frac{2}{9}\int(t^4-t^2)dt$

$=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)+C$

$=\frac{2}{9}\cdot\frac{t^3}{15}(3t^2-5)+C$　（以下略）

(3) $\int\sin^2 x\cos x\,dx$

$=\int\sin^2 x(\sin x)'dx$

$=\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

(4) $\int(e^x-5)^4e^x dx$

$=\int(e^x-5)^4\cdot(e^x-5)'dx$

$=\frac{1}{5}(e^x-5)^5+C$

(5) $\int\sin^5 x\,dx$

$=\int\sin^4 x\sin x\,dx$

$=\int(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx$

$\cos x=t$ とおくと，$-\sin x\,dx=dt$ であるから

$\int(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx$

$=-\int(1-t^2)^2dt$

$=-\int(1-2t^2+t^4)dt$

$=-t+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5+C$

$=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

3 (1) $\log|x^2+3x-5|+C$　(2) $\frac{1}{2}(\log x)^2+C$

(3) $-\log|\cos x|+C$

解説 (1) $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-5}dx$

$=\int\frac{(x^2+3x-5)'}{x^2+3x-5}dx$

$=\log|x^2+3x-5|+C$

(2) $\int\frac{\log x}{x}dx$

$=\int(\log x)(\log x)'dx$

$=\frac{1}{2}(\log x)^2+C$

(3) $\int\tan x\,dx$

$=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$=\int\frac{-(\cos x)'}{\cos x}dx$

$=-\log|\cos x|+C$

4 (1) $x\log x-x+C$

(2) $-x\cos x+\sin x+C$

(3) $-xe^{-x}-e^{-x}+C$

(4) $\frac{1}{21}(x-1)^6(3x+4)+C$

解説 (1) $\int\log x\,dx=\int(x)'\log x\,dx$

$=x\log x-\int x\cdot(\log x)'dx$

$=x\log x-\int dx$

$=x\log x-x+C$

(2) $\int x\sin x\,dx=\int x\cdot(-\cos x)'dx$

$=-x\cos x+\int\cos x\,dx$

$=-x\cos x+\sin x+C$

(3) $\int xe^{-x}dx=\int x\cdot(-e^{-x})'dx$

$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$

$=-xe^{-x}-e^{-x}+C$

(4) $\int(x+1)(x-1)^5dx$

$=\int(x+1)\cdot\left\{\frac{1}{6}(x-1)^6\right\}'dx$

$=\frac{1}{6}(x+1)(x-1)^6-\frac{1}{6}\int(x-1)^6dx$

$=\frac{1}{6}(x+1)(x-1)^6-\frac{1}{42}(x-1)^7+C$

$=\frac{1}{42}(x-1)^6\{7(x+1)-(x-1)\}+C$

$=\frac{1}{42}(x-1)^6(6x+8)+C$

$=\frac{1}{21}(x-1)^6(3x+4)+C$

5 (1) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$　(2) $\log\left|\frac{x}{3x+1}\right|+C$

(3) $-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

解説 (1) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$

(2) $\frac{1}{x(3x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{3x+1}$ とおくと

$a(3x+1)+bx=1$

$(3a+b)x+a=1$

よって，$3a+b=0$，$a=1$ より

$a=1$，$b=-3$

したがって

$\int\frac{dx}{x(3x+1)}$

$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{3x+1}\right)dx$

$=\log|x|-\log|3x+1|+C$

$=\log\left|\frac{x}{3x+1}\right|+C$

(3) $\sin 5x\cos 3x$

$=\frac{1}{2}\{\sin(5x+3x)+\sin(5x-3x)\}$ より

$\int\sin 5x\cos 3x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)dx$

$=-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

P.116　**入試問題演習**

STEP 1

1 (1) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{2x-1}{4x+1}\right|+C$

(2) $\frac{1}{2}x^2-x+\log|x+1|+C$

(3) $\frac{3}{25}x^{\frac{5}{3}}(5\log x-3)+C$

(4) $(\log|\sin x|)^2+C$

(5) $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C$

解説 (1) $8x^2-2x-1=(4x+1)(2x-1)$

$\frac{3}{8x^2-2x-1}=\frac{a}{4x+1}+\frac{b}{2x-1}$

とおくと

$a(2x-1)+b(4x+1)=3$

$(2a+4b)x-a+b=3$

よって，$2a+4b=0$，$-a+b=3$ より

$a=-2$，$b=1$

$\int\frac{3}{8x^2-2x-1}dx$

$=\int\left(-\frac{2}{4x+1}+\frac{1}{2x-1}\right)dx$

$=-\frac{1}{2}\log|4x+1|+\frac{1}{2}\log|2x-1|+C$

$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{2x-1}{4x+1}\right|+C$

(2) $\int\frac{x^2}{x+1}dx$

$=\int\frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}dx$

$=\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2-x+\log|x+1|+C$

(3) $\int x^{\frac{2}{3}}\log x\,dx=\int\left(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)'\log x\,dx$

$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\log x-\frac{3}{5}\int x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{x}dx$

$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\log x-\frac{3}{5}\int x^{\frac{2}{3}}dx$

$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\log x-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

$=\frac{3}{25}x^{\frac{5}{3}}(5\log x-3)+C$

(4) $\int\frac{\log(\sin^2 x)}{\tan x}dx$

$=\int\frac{2\log|\sin x|}{\tan x}dx$

$=\int 2\log|\sin x|\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx$

$=\int 2\log|\sin x|\cdot(\log|\sin x|)'dx$

$=(\log|\sin x|)^2+C$

(5) $\sqrt[3]{x}=t$ とおくと

$x=t^3$，$\frac{dx}{dt}=3t^2$

$\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

$=\int e^t\cdot 3t^2dt$

$=\int(e^t)'\cdot 3t^2dt$

$=3t^2e^t-\int 6te^tdt$

$=3t^2e^t-6\int t\cdot(e^t)'dt$

$=3t^2e^t-6te^t+6\int e^tdt$

$=3t^2e^t-6te^t+6e^t+C$

$=3e^t(t^2-2t+2)+C$

$=3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C$

2 $f'(x)=\frac{1}{\sin x}$

$\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\tan\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$

解説 $f'(x)=\frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}}$

$=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}$

$\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$

$=\int\frac{dx}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\tan\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$

3 ア $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$　イ $-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$

ウ $-\sin\theta$　エ $\cos\theta$　オ $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

解説 $x=\frac{1}{\sin\theta}$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta}-1}$

$=\sqrt{\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}}$

$=\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\frac{dx}{d\theta}=-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$

したがって

$F(x)$

$=\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$

$=\int \sin^2\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\left(-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)d\theta$

$=\int(-\sin\theta)d\theta$

$=\cos\theta$ （積分定数は無視）

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta>0$ であり，題意より

$x>1$ であるから

$F(x)=\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

STEP2

1 (1) $a_1=a_2=a_3=b=1$

(2) $\log\left|\frac{x}{1-x}\right|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$

(3) $p=1$ のとき，$\log\left|\frac{x}{1-x}\right|+C$

$p\geqq 2$ のとき，$\log\left|\frac{x}{1-x}\right|-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{kx^k}+C$

解説 (1) $f(x)$

$=\frac{a_1x^2(1-x)+a_2x(1-x)+a_3(1-x)+bx^3}{x^3(1-x)}$

$=\frac{(b-a_1)x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_2-a_3)x+a_3}{x^3(1-x)}$

よって

$b-a_1=a_1-a_2=a_2-a_3=0,\ a_3=1$

ゆえに，$a_1=a_2=a_3=b=1$

(2) (1)より

$\int f(x)dx$

$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{1-x}\right)dx$

$=\log|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\log|1-x|+C$

$=\log\left|\frac{x}{1-x}\right|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$

(3) (i) $p=1$ のとき

$\int\frac{dx}{x(1-x)}$

$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx$

$=\log\left|\frac{x}{1-x}\right|+C$

(ii) $p\geqq 2$ のとき

$\frac{1}{x^p(1-x)}=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_p}{x^p}+\frac{b}{1-x}$

とおくと

（右辺）

$=\frac{(a_1x^{p-1}+a_2x^{p-2}+\cdots+a_p)(1-x)+bx^p}{x^p(1-x)}$

$=\frac{1}{x^p(1-x)}\{(b-a_1)x^p+(a_1-a_2)x^{p-1}$

$+\cdots+(a_{p-1}-a_p)x+a_p\}$

よって

$b-a_1=a_1-a_2=\cdots=a_{p-1}-a_p=0,$

$a_p=1$

したがって

$a_1=a_2=\cdots=a_p=b=1$

$\int\frac{dx}{x^p(1-x)}$

$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^p}+\frac{1}{1-x}\right)dx$

$=\log|x|-\frac{1}{x}-\cdots-\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}$

$-\log|1-x|+C$

$=\log\left|\frac{x}{1-x}\right|-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{kx^k}+C$

（別解）

(2)の計算を，(3)の $p=1$ の場合をくり返し用いて，次のように計算してもよい。

$\frac{1}{x^3(1-x)}$

$=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x(1-x)}$

$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)$

$=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x(1-x)}$

$=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)$

$=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x(1-x)}$

$=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$

(3)の $p\geqq 2$ の場合も同様に計算できる。

第24講 定積分の計算(1)

P.117〜P.119 類題

1 (1) $2(e^2-\sqrt{e})$ (2) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

(3) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

解説 (1) $\int_1^4 e^{\frac{x}{2}}dx=\left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_1^4$

$=2(e^2-\sqrt{e})$

(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

(3) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos^2 2x}=\left[\frac{1}{2}\tan 2x\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

2 (1) $-\frac{78}{5}$ (2) $\log\frac{19}{4}$

解説 (1) $x+5=t$ とおくと，$x=t-5,\ \frac{dx}{dt}=1$

x と t の対応は右のようになる。

x	$-4\to-1$
t	$1\to 4$

よって

$\int_{-4}^{-1}(x-1)\sqrt{x+5}\,dx$

$=\int_1^4(t-6)\sqrt{t}\,dt$

$=\int_1^4\left(t^{\frac{3}{2}}-6t^{\frac{1}{2}}\right)dt$

$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-4t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$

$=\left(\frac{64}{5}-32\right)-\left(\frac{2}{5}-4\right)=-\frac{78}{5}$

(2) $\int_6^9\frac{2x-5}{x^2-5x+2}dx$

$=\int_6^9\frac{(x^2-5x+2)'}{x^2-5x+2}dx$

$=\left[\log|x^2-5x+2|\right]_6^9$

$=\log 38-\log 8=\log\frac{19}{4}$

3 (1) $\frac{3}{4}\pi+\frac{9\sqrt{3}}{8}$ (2) $\frac{\pi}{8}$

解説 (1) $x=3\sin\theta$ とおくと

$\frac{dx}{d\theta}=3\cos\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\to\frac{3}{2}$
θ	$0\to\frac{\pi}{6}$

よって

$\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{9-x^2}\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}\cdot 3\cos\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}9\cos^2\theta\,d\theta$

$=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2\theta)d\theta$

$=\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=\frac{3}{4}\pi+\frac{9\sqrt{3}}{8}$

(2) $x=2\tan\theta$ とおくと，$\frac{dx}{d\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\to 2$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

よって

$\int_0^2\frac{dx}{4+x^2}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta$

$=\frac{1}{2}\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$

4 (1) $\frac{1}{4}(5e^6+1)$ (2) $\frac{1}{4}(e^2+1)$

解説 (1) $\int_0^3 xe^{2x}dx=\int_0^3 x\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$

$=\left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3 e^{2x}dx$

$=\frac{3}{2}e^6-\frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^3$

$=\frac{3}{2}e^6-\frac{1}{4}e^6+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}(5e^6+1)$

(2) $\int_1^e x\log x\,dx=\int_1^e\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$

$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^e$

$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}(e^2-1)$

$=\frac{1}{4}(e^2+1)$

P.120 演習問題

1 (1) $\dfrac{6}{\log 2}$ (2) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$

(3) $\dfrac{1}{4}\log\dfrac{3}{2}$

解説 (1) $\displaystyle\int_1^2 2^{2x}dx=\left[\frac{2^{2x}}{2\log 2}\right]_1^2$

$\displaystyle=\frac{8}{\log 2}-\frac{2}{\log 2}=\frac{6}{\log 2}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)^2dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2\sin x\cos x)dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin 2x)dx$

$\displaystyle=\left[x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\displaystyle=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

(3) $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{x^2+6x+5}=\int_1^3\frac{dx}{(x+5)(x+1)}$

$\displaystyle\frac{1}{(x+5)(x+1)}=\frac{a}{x+5}+\frac{b}{x+1}$ とおくと

$1=a(x+1)+b(x+5)$

$(a+b)x+a+5b=1$

よって，$a+b=0$，$a+5b=1$ より

$a=-\dfrac{1}{4}$，$b=\dfrac{1}{4}$

したがって

$\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{(x+5)(x+1)}$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\int_1^3\left(-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\Big[-\log|x+5|+\log|x+1|\Big]_1^3$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{x+1}{x+5}\right|\right]_1^3$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\left(\log\frac{1}{2}-\log\frac{1}{3}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{4}(-\log 2+\log 3)=\frac{1}{4}\log\frac{3}{2}$

2 (1) $-2(2\sqrt{2}+1)e^{-2\sqrt{2}}+\dfrac{4}{e}$

(2) 80 (3) $-\dfrac{1}{2}\log 2$

解説 (1) $-\sqrt{x}=t$ とおくと，$x=t^2$，$\dfrac{dx}{dt}=2t$

x と t の対応は右のようになる。

x	$1\to 8$
t	$-1\to -2\sqrt{2}$

$\displaystyle\int_1^8 e^{-\sqrt{x}}dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{-2\sqrt{2}}e^t\cdot 2t\,dt$

$\displaystyle=\Big[2te^t\Big]_{-1}^{-2\sqrt{2}}-2\int_{-1}^{-2\sqrt{2}}e^t dt$

$\displaystyle=-4\sqrt{2}e^{-2\sqrt{2}}+2e^{-1}-2\Big[e^t\Big]_{-1}^{-2\sqrt{2}}$

$=-4\sqrt{2}e^{-2\sqrt{2}}+2e^{-1}-2(e^{-2\sqrt{2}}-e^{-1})$

$=-2(2\sqrt{2}+1)e^{-2\sqrt{2}}+\dfrac{4}{e}$

(2) $\sqrt{x-3}=t$ とおくと，$x-3=t^2$，$x=t^2+3$

$\dfrac{dx}{dt}=2t$

x と t の対応は右のようになる。

x	$3\to 7$
t	$0\to 2$

$\displaystyle\int_3^7(5x-12)\sqrt{x-3}\,dx$

$\displaystyle=\int_0^2(5t^2+3)t\cdot 2t\,dt$

$\displaystyle=\int_0^2(10t^4+6t^2)dt$

$\displaystyle=\Big[2t^5+2t^3\Big]_0^2$

$=80$

(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

$\displaystyle=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{-(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx$

$\displaystyle=\Big[\log|\sin x+\cos x|\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$

$=-\log\sqrt{2}=-\dfrac{1}{2}\log 2$

3 (1) $\dfrac{\pi}{3}$ (2) $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$

解説 (1) $x=2\sin\theta$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$-1\to 1$
θ	$-\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{6}$

$\displaystyle\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$\displaystyle=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$

$\displaystyle=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta$

$\displaystyle=\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$

$=\dfrac{\pi}{3}$

(2) $x=\tan\theta$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\to 1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

よって

$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)^2}$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

4 (1) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2$ (2) $9(\log 3)^2-6\log 3+\dfrac{52}{27}$

解説 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\tan x)'dx$

$\displaystyle=\Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

$\displaystyle=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$

$\displaystyle=\frac{\pi}{4}+\Big[\log(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\displaystyle=\frac{\pi}{4}+\log\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\displaystyle=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$

(2) $\displaystyle\int_1^3 x^2(\log x)^2dx$

$\displaystyle=\int_1^3\left(\frac{1}{3}x^3\right)'(\log x)^2dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{3}x^3(\log x)^2\right]_1^3-\int_1^3\frac{1}{3}x^3\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$

$\displaystyle=9(\log 3)^2-\frac{2}{3}\int_1^3 x^2\log x\,dx$

$\displaystyle=9(\log 3)^2-\frac{2}{3}\int_1^3\left(\frac{1}{3}x^3\right)'\log x\,dx$

$\displaystyle=9(\log 3)^2-\frac{2}{3}\left\{\left[\frac{1}{3}x^3\log x\right]_1^3-\int_1^3\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx\right\}$

$\displaystyle=9(\log 3)^2-\frac{2}{3}\left(9\log 3-\frac{1}{3}\int_1^3 x^2dx\right)$

$\displaystyle=9(\log 3)^2-6\log 3+\frac{2}{9}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3$

$\displaystyle=9(\log 3)^2-6\log 3+\frac{2}{9}\left(9-\frac{1}{3}\right)$

$\displaystyle=9(\log 3)^2-6\log 3+\frac{52}{27}$

5 $\dfrac{1}{2}(e^\pi+1)$

解説 $\displaystyle I=\int_0^\pi e^x\sin x\,dx$ とおくと

$\displaystyle I=\int_0^\pi(e^x)'\sin x\,dx$

$\displaystyle=\Big[e^x\sin x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$

$\displaystyle=-\int_0^\pi(e^x)'\cos x\,dx$

$\displaystyle=-\Big[e^x\cos x\Big]_0^\pi+\int_0^\pi e^x(-\sin x)dx$

$=e^\pi+1-I$

よって，$I=\dfrac{1}{2}(e^\pi+1)$

P.121 入試問題演習

STEP 1

1 (1) $\dfrac{4}{7}$ (2) $\dfrac{1}{3}$

(3) $\log\dfrac{3(e+1)}{2(e+2)}$ (4) $-\dfrac{2}{3}\log 2+\log 3$

解説 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 4x\cos 3x\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 7x+\sin x)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}\cos 7x-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}+1\right)$

$=\dfrac{4}{7}$

(2) $1-x^2=t$ とおくと

$-2x\,dx=dt$，$x\,dx=-\dfrac{1}{2}dt$

また，x と t の対応は右のようになる。

x	$0\to 1$
t	$1\to 0$

よって，$\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$\displaystyle=\int_1^0\sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

(3) $e^x=t$ とおくと，$x=\log t$，$dx=\dfrac{1}{t}dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\to 1$
t	$1\to e$

よって

$$\int_0^1\frac{dx}{e^x+2e^{-x}+3}$$
$$=\int_1^e\frac{1}{t+\frac{2}{t}+3}\cdot\frac{1}{t}dt$$
$$=\int_1^e\frac{dt}{t^2+3t+2}$$
$$=\int_1^e\frac{dt}{(t+1)(t+2)}$$
$$=\int_1^e\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)dt$$
$$=\left[\log\left|\frac{t+1}{t+2}\right|\right]_1^e$$
$$=\log\frac{e+1}{e+2}-\log\frac{2}{3}$$
$$=\log\frac{3(e+1)}{2(e+2)}$$

(4) $\displaystyle\int_1^3\frac{\log(x+1)}{x^2}dx$
$$=\int_1^3\left(-\frac{1}{x}\right)'\log(x+1)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{x}\log(x+1)\right]_1^3+\int_1^3\frac{dx}{x(x+1)}$$
$$=-\frac{2}{3}\log 2+\log 2+\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}\log 2+\left[\log\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{3}\log 2+\log\frac{3}{4}-\log\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{3}\log 2+\log 3-2\log 2+\log 2$$
$$=-\frac{2}{3}\log 2+\log 3$$

2 (1) **商…$3x^2+8x-3$，余り…$-8x+3$**

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\log 2$

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4}$

(3) $2-4\log 2+\dfrac{3}{4}\pi$

解説 (1)

$$\begin{array}{r} 3x^2+8x-3 \\ x^2+1\,\overline{)\,3x^4+8x^3} \\ \underline{3x^4+3x^2} \\ 8x^3-3x^2 \\ \underline{8x^3+8x} \\ -3x^2-8x \\ \underline{-3x^2-3} \\ -8x+3 \end{array}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$
$$=\frac{1}{2}\Big[\log|x^2+1|\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\log 2$$

$x=\tan\theta$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\to 1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

よって

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

(3) $\displaystyle I=\int_0^1\frac{3x^4+8x^3}{x^2+1}dx$
$$=\int_0^1\left(3x^2+8x-3-8\cdot\frac{x}{x^2+1}+3\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\Big[x^3+4x^2-3x\Big]_0^1-8\cdot\frac{1}{2}\log 2+3\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$=2-4\log 2+\frac{3}{4}\pi$$

3 (1) $A=\sqrt{2}$，$B=\dfrac{\pi}{4}$

(2) **$a-x=t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=-1$**

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\to a$
t	$a\to 0$

$$\int_0^a f(a-x)dx=\int_a^0 f(t)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_0^a f(t)dt$$

$\displaystyle\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx$ であるから，

$\displaystyle\int_0^a f(a-x)dx=\int_0^a f(x)dx$ が成り立つ。

(3) $\dfrac{\pi}{8}\log 2$

解説 (1) $(1+\tan x)\cos x$
$$=\cos x+\sin x$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

よって，$A=\sqrt{2}$，$B=\dfrac{\pi}{4}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan x)dx$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\log\left\{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}-\log(\cos x)\right]dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{\log(\sqrt{2}\cos x)-\log(\cos x)\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\sqrt{2}\,dx$$
$$=\Big[(\log\sqrt{2})x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{1}{2}\log 2\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\pi}{8}\log 2$$

STEP2

1 (1) $a\left(\log 2a^2-2+\dfrac{\pi}{2}\right)$ (2) $\dfrac{\pi}{4}$

解説 (1) $\displaystyle\int_0^a\log(a^2+x^2)dx$
$$=\int_0^a(x)'\log(a^2+x^2)dx$$
$$=\Big[x\log(a^2+x^2)\Big]_0^a-\int_0^a\frac{2x^2}{a^2+x^2}dx$$
$$=a\log 2a^2-2\int_0^a\frac{x^2}{a^2+x^2}dx$$

$\displaystyle\int_0^a\frac{x^2}{a^2+x^2}dx$ において，$x=a\tan\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{a}{\cos^2\theta}$$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\to a$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^a\frac{x^2}{a^2+x^2}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^2\tan^2\theta}{a^2(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^2\theta\,d\theta$$
$$=a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)d\theta$$
$$=a\Big[\tan\theta-\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=a\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

よって

$$与式=a\log 2a^2-2a\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=a\left(\log 2a^2-2+\frac{\pi}{2}\right)$$

(2) $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$ において，$\theta=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと，$\dfrac{d\theta}{dt}=-1$

θ と t の対応は右のようになる。

θ	$0\to\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}\to 0$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\cdot(-1)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$$

したがって

$2I$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}$$

ゆえに，$I=\dfrac{\pi}{4}$

第25講　定積分の計算(2)

P.122〜P.124　類題

1　(1) $\frac{84}{5}$　(2) 0

解説 (1) $2x^3$, $6x$ は奇関数, x^4, $6x^2$, 9 は偶関数であるから

$$\int_{-2}^{2}(x^4+2x^3-6x^2+6x+9)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(2x^3+6x)\,dx+\int_{-2}^{2}(x^4-6x^2+9)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(x^4-6x^2+9)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{5}x^5-2x^3+9x\right]_0^2$$
$$=2\left(\frac{32}{5}-16+18\right)=\frac{84}{5}$$

(2) $f(x)=2^x-2^{-x}$ とすると

$f(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-f(x)$

よって, $f(x)$は奇関数であるから

$$\int_{-4}^{4}(2^x-2^{-x})\,dx=0$$

2　4

解説 $\sqrt{x+1}-2=0$ となる x の値は $x=3$ より

$0\leqq x\leqq 3$ のとき

$|\sqrt{x+1}-2|=-(\sqrt{x+1}-2)$

$3\leqq x\leqq 8$ のとき, $|\sqrt{x+1}-2|=\sqrt{x+1}-2$

よって

$$\int_0^8|\sqrt{x+1}-2|\,dx$$
$$=-\int_0^3(\sqrt{x+1}-2)\,dx+\int_3^8(\sqrt{x+1}-2)\,dx$$
$$=-\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2x\right]_0^3+\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2x\right]_3^8$$
$$=-\left(\frac{16}{3}-6\right)+\frac{2}{3}+(18-16)-\left(\frac{16}{3}-6\right)$$
$$=4$$

3　$\frac{\pi}{4}$

解説 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right\}$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$x=\tan\theta$ とおくと, $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x と θ の対応は右のようになる。

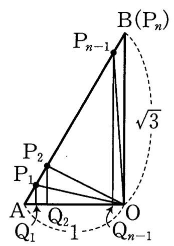
x	$0\to1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

よって

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

4　$\frac{4}{3}$

解説 OA=1, $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$ より



$\mathrm{OB}=1\cdot\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

P_kとOを結び, P_kから辺OAに垂線P_kQ_kを引くと

$P_kQ_k=\sqrt{3}\cdot\frac{k}{n}$

$OQ_k=1-\frac{k}{n}$

であるから

$$(OP_k)^2=(P_kQ_k)^2+(OQ_k)^2$$
$$=\left(\sqrt{3}\cdot\frac{k}{n}\right)^2+\left(1-\frac{k}{n}\right)^2$$

($k=1$, 2, ……, n)

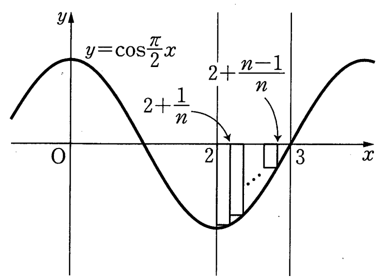
よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\sqrt{3}\cdot\frac{1}{n}\right)^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\left(\sqrt{3}\cdot\frac{2}{n}\right)^2+\left(1-\frac{2}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\sqrt{3}\cdot\frac{n}{n}\right)^2+\left(1-\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\sqrt{3}\cdot\frac{k}{n}\right)^2+\left(1-\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\int_0^1\{3x^2+(1-x)^2\}\,dx$$
$$=\int_0^1(4x^2-2x+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

5　$-\frac{2}{\pi}$

解説 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2n+1}^{3n}\cos\frac{k\pi}{2n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2n+1}^{3n}\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}$$
$$=\int_2^3\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_2^3$$
$$=\frac{2}{\pi}\sin\frac{3}{2}\pi-\frac{2}{\pi}\sin\pi$$
$$=-\frac{2}{\pi}$$



P.125　演習問題

1　(1) $\frac{\sqrt{2}}{6}$　(2) 2

解説 (1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)\sin^2x\,dx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin^3x+\sin^2x\cos x)\,dx$$

$\sin^3x$ は奇関数, $\sin^2x\cos x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin^3x+\sin^2x\cos x)\,dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\cos x\,dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x(\sin x)'\,dx$$
$$=\frac{2}{3}\Big[\sin^3x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

(2) $f(x)=x\sin x$ とすると

$f(-x)=-x\cdot\sin(-x)=x\sin x=f(x)$

よって, $f(x)$は偶関数であるから

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot(-\cos x)'\,dx$$
$$=-2\Big[x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$
$$=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

2　(1) $e+\frac{1}{e}-2$　(2) $2\sqrt{2}-2$

解説 (1) $-1\leqq x\leqq 0$ のとき, $|e^{-x}-1|=e^{-x}-1$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき, $|e^{-x}-1|=-(e^{-x}-1)$

であるから

$$\int_{-1}^{1}|e^{-x}-1|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(e^{-x}-1)\,dx-\int_0^1(e^{-x}-1)\,dx$$
$$=\Big[-e^{-x}-x\Big]_{-1}^{0}-\Big[-e^{-x}-x\Big]_0^1$$
$$=-1-(-e+1)-(-e^{-1}-1)-1$$
$$=e+\frac{1}{e}-2$$

(2) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき

$|\sin x-\cos x|=-(\sin x-\cos x)$

$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$|\sin x-\cos x|=\sin x-\cos x$

であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\,dx$$
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\,dx$$
$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,dx$$
$$=\Big[\cos x+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\Big[\cos x+\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-1-1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=2\sqrt{2}-2$$

3　(1) $\frac{1}{5}$　(2) $\frac{2}{\pi}$　(3) $2-\sqrt{3}$

(4) $\frac{15}{4}$　(5) $\frac{16}{9}$

解説 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4}{n^5}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^4\right\}$$
$$=\int_0^1x^4\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{5}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$

$$=\int_0^1\sin\pi x\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1$$

$=-\dfrac{1}{\pi}(-1-1)$

$=\dfrac{2}{\pi}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{3n^4+n^2k^2}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{3n^2+k^2}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$

$\displaystyle=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}dx$

$\displaystyle=\Big[\sqrt{3+x^2}\Big]_0^1$

$=2-\sqrt{3}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=n}^{2n-1}k^3$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^3$

$\displaystyle=\int_1^2 x^3\,dx$

$\displaystyle=\Big[\frac{1}{4}x^4\Big]_1^2$

$=\dfrac{15}{4}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5)^2}{(1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3)^3}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^5+\left(\frac{2}{n}\right)^5+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^5\right\}^2}{\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right\}^3}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^5+\left(\frac{2}{n}\right)^5+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^5\right\}\right]^2}{\left[\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right\}\right]^3}$

$\displaystyle=\frac{\left(\int_0^1 x^5dx\right)^2}{\left(\int_0^1 x^3dx\right)^3}$

$\displaystyle=\frac{\left(\Big[\frac{1}{6}x^6\Big]_0^1\right)^2}{\left(\Big[\frac{1}{4}x^4\Big]_0^1\right)^3}$

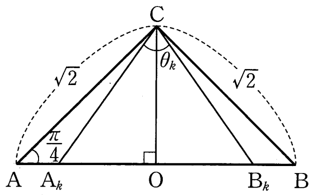
$=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\div\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$

$=\dfrac{4^3}{6^2}$

$=\dfrac{16}{9}$

4 $\log 2$

解説



題意より，$OC=1$，$OA_k=OB_k=\dfrac{k}{n}$

よって，$CA_k=CB_k=\sqrt{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$

$\triangle A_kCB_k=\dfrac{1}{2}\cdot A_kB_k\cdot CO=\dfrac{k}{n}$

一方，$\triangle A_kCB_k=\dfrac{1}{2}\cdot CA_k\cdot CB_k\cdot\sin\theta_k$

$=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\right\}\sin\theta_k$

よって，$\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\right\}\sin\theta_k=\dfrac{k}{n}$ より

$\sin\theta_k=\dfrac{2\cdot\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\cdot\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$\displaystyle=\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx$

$\displaystyle=\Big[\log(1+x^2)\Big]_0^1$

$=\log 2$

P.126 **入試問題演習**

STEP 1

1 (1) $\dfrac{1}{\log 2}$　(2) $\dfrac{7}{12}$

解説 (1) $\displaystyle\int_0^2|2^x-2|\,dx$

$\displaystyle=-\int_0^1(2^x-2)\,dx+\int_1^2(2^x-2)\,dx$

$\displaystyle=-\Big[\frac{2^x}{\log 2}-2x\Big]_0^1+\Big[\frac{2^x}{\log 2}-2x\Big]_1^2$

$=-\left(\dfrac{2}{\log 2}-2\right)+\dfrac{1}{\log 2}+\left(\dfrac{4}{\log 2}-4\right)$

$-\left(\dfrac{2}{\log 2}-2\right)$

$=\dfrac{1}{\log 2}$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2x|\sin x\,dx$

$\displaystyle=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\sin 2x\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\sin x\,dx$

$\displaystyle=-2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\sin^2x\cos x\,dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos x\,dx$

$\displaystyle=-\frac{2}{3}\Big[\sin^3x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{0}+\frac{2}{3}\Big[\sin^3x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{8}+\dfrac{2}{3}$

$=\dfrac{7}{12}$

2 (1) $\log 2$　(2) $e-2$　(3) $2\log 2-1$

(4) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}$

解説 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

$\displaystyle=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$

$\displaystyle=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1$

$=\log 2$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}e^{\frac{1}{n}}+\frac{2^2}{n^3}e^{\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{n^3}e^{\frac{n}{n}}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2e^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{2}{n}\right)^2e^{\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2e^{\frac{n}{n}}\right\}$

$\displaystyle=\int_0^1x^2e^x\,dx$

$\displaystyle=\Big[x^2e^x\Big]_0^1-\int_0^1 2xe^x\,dx$

$\displaystyle=e-\left(\Big[2xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 2e^x\,dx\right)$

$\displaystyle=e-\left(2e-2\Big[e^x\Big]_0^1\right)$

$=e-\{2e-2(e-1)\}$

$=e-2$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{2n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{2n-2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{n+1}{n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\frac{n-2}{n}\right)$

$\cdots\cdots\times\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$\displaystyle=\int_0^1\log(1+x)\,dx$

$\displaystyle=\int_0^1(1+x)'\log(1+x)\,dx$

$\displaystyle=\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1dx$

$=2\log 2-1$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right)=\int_0^1\cos^2\frac{\pi}{4}x\,dx$

$\displaystyle=\int_0^1\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$\displaystyle=\Big[\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right)\Big]_0^1$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{2}{\pi}\right)$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}$

3 (1) $\mathrm{R}\left(\dfrac{\alpha+2}{2},\ \dfrac{e^\alpha}{2}\right)$，$f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x-2}$

(2) $(2+\log 2,\ 2e^2)$

(3) $\dfrac{e-1}{2e^2}$

解説 (1) Rの座標は$\left(\dfrac{\alpha+2}{2},\ \dfrac{e^\alpha+0}{2}\right)$より

$\left(\dfrac{\alpha+2}{2},\ \dfrac{e^\alpha}{2}\right)$

$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha+2}{2} & \cdots\cdots① \\ y=\dfrac{e^\alpha}{2} & \cdots\cdots② \end{cases}$

とすると，①より，$\alpha=2x-2$

②に代入して，$y=\dfrac{1}{2}e^{2x-2}$

(2) $e^x=\dfrac{1}{2}e^{2x-2}$ とし，両辺の自然対数をとると

$x=\log\dfrac{e^{2x-2}}{2}=2x-2-\log 2$

よって，$x=2+\log 2$

これを $y=e^x$ に代入して，$y=e^{2+\log 2}=2e^2$

したがって，共有点の座標は

$(2+\log 2,\ 2e^2)$

(3) $f\left(\dfrac{k}{2n}\right)=\dfrac{1}{2}e^{2\cdot\frac{k}{2n}-2}=\dfrac{1}{2}e^{\frac{k}{n}-2}$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{2n}\right)+f\left(\frac{2}{2n}\right)+f\left(\frac{3}{2n}\right)+\cdots\cdots\right.$

$\left.+f\left(\dfrac{n}{2n}\right)\right\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{n}-2}+\frac{1}{2}e^{\frac{2}{n}-2}+\frac{1}{2}e^{\frac{3}{n}-2}+\cdots\cdots\right.$

$\left.+\dfrac{1}{2}e^{\frac{n}{n}-2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}e^{\frac{k}{n}-2}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{2}e^{x-2}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{x-2}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-2}$$
$$=\frac{e-1}{2e^2}$$

STEP 2

1 (1) $\log(2+\sqrt{3})$ (2) $\frac{2}{\pi}\log(2+\sqrt{3})$

解説 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

$\sin x=t$ とおくと，$\cos x\,dx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\to\frac{\pi}{3}$
t	$0\to\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{1-t^2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[-\log|1-t|+\log|1+t|\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{(2+\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\log(2+\sqrt{3})$$

(2) $\log(n^2+2n+1)-\log n^2$

$$=\log\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$
$$=2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\log(n^2+2n+1)-\log n^2}{3\cos\frac{\pi}{3n}k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3\cos\frac{\pi}{3n}k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{3\cos\frac{\pi}{3}\cdot\frac{k}{n}}$$
$$=2\int_0^1\frac{1}{3\cos\frac{\pi}{3}x}dx$$

$\frac{\pi}{3}x=\theta$ とおくと，$\frac{dx}{d\theta}=\frac{3}{\pi}$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\to1$
θ	$0\to\frac{\pi}{3}$

よって

$$2\int_0^1\frac{1}{3\cos\frac{\pi}{3}x}dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\cos\theta}\cdot\frac{3}{\pi}d\theta$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos\theta}d\theta$$
$$=\frac{2}{\pi}\log(2+\sqrt{3})$$

第26講 積分の応用(1)

P.128〜P.129 類題

1 $1\leqq x\leqq2$ において，$x^2<x^2+2x\leqq8$ より
$x<\sqrt{x^2+2x}\leqq2\sqrt{2}$

よって，$\frac{\sqrt{2}}{4}\leqq\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}<\frac{1}{x}$ ……①

$$\int_1^2\frac{\sqrt{2}}{4}dx=\left[\frac{\sqrt{2}}{4}x\right]_1^2=\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$\int_1^2\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_1^2=\log2$$

①において，つねに $\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$ となることはないので

$$\int_1^2\frac{\sqrt{2}}{4}dx<\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}<\int_1^2\frac{dx}{x}$$

すなわち，$\frac{\sqrt{2}}{4}<\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}<\log2$ が成り立つ。

2 $f(x)=(2x^2-4x-3)e^{2x}$，$a=0,\ 3$

解説 $\int_a^x f(t)dt=(x^2-3x)e^{2x}$ ……①

①の両辺を x で微分して
$f(x)=(2x-3)e^{2x}+(x^2-3x)\cdot2e^{2x}$
$\quad=(2x^2-4x-3)e^{2x}$
①の両辺に $x=a$ を代入して
$(a^2-3a)e^{2a}=0$
$e^{2a}>0$ であるから，$a^2-3a=0$
$a(a-3)=0$
$a=0,\ 3$

3 $f(x)=\frac{18}{7}x-\frac{16}{7}$

解説 $f(x)=\int_0^2(x-t)f(t)dt+2x$
$\quad=x\int_0^2 f(t)dt-\int_0^2 tf(t)dt+2x$

$\int_0^2 f(t)dt=k$，$\int_0^2 tf(t)dt=\ell$ とおくと

$f(x)=kx-\ell+2x=(k+2)x-\ell$

$$k=\int_0^2\{(k+2)t-\ell\}dt$$
$$=\left[\frac{(k+2)t^2}{2}-\ell t\right]_0^2$$
$$=2k+4-2\ell$$

よって，$k-2\ell=-4$ ……①

$$\ell=\int_0^2 tf(t)dt$$
$$=\int_0^2 t\{(k+2)t-\ell\}dt$$
$$=\int_0^2\{(k+2)t^2-\ell t\}dt$$
$$=\left[\frac{(k+2)t^3}{3}-\frac{\ell}{2}t^2\right]_0^2$$
$$=\frac{8}{3}(k+2)-2\ell$$

よって，$8k-9\ell=-16$ ……②

②－①×8 より
$7\ell=16$
$\ell=\frac{16}{7}$
①に代入して
$k-\frac{32}{7}=-4$
$k=\frac{4}{7}$

以上より，$f(x)=\left(\frac{4}{7}+2\right)x-\frac{16}{7}$
$\quad=\frac{18}{7}x-\frac{16}{7}$

4 $n\geqq2$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x(\sin x)'dx$$
$$=\Big[\cos^{n-1}x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)\sin x\,dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$$
$$n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\,dx$$

よって，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\,dx$

すなわち，$J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}$ が成り立つ。

P.130 演習問題

1 (1) ① $(\sqrt{1+t^4})^2-1=1+t^4-1=t^4\geqq0$
よって，$1\leqq\sqrt{1+t^4}$
（等号成立は，$t=0$ のとき）
$(1+t^2)^2-(\sqrt{1+t^4})^2$
$=(1+2t^2+t^4)-(1+t^4)=2t^2\geqq0$
よって，$\sqrt{1+t^4}\leqq1+t^2$
（等号成立は，$t=0$ のとき）
以上より，$1\leqq\sqrt{1+t^4}\leqq1+t^2$ が成り立つ。

② $(\sqrt{1+t^4})^2-(t^2)^2=(1+t^4)-t^4=1>0$
よって，$t^2<\sqrt{1+t^4}$

$(\sqrt{2}t^2)^2-(\sqrt{1+t^4})^2=2t^4-(1+t^4)$

$=t^4-1$

$t\geqq 1$ のとき，$t^4-1\geqq 0$ より，$\sqrt{1+t^4}\leqq\sqrt{2}t^2$

（等号成立は，$t=1$ のとき）

以上より，$t^2<\sqrt{1+t^4}\leqq\sqrt{2}t^2$ が成り立つ。

(2) $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}+\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ ……Ⓐ

(1)①より，$\frac{1}{1+t^2}\leqq\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\leqq 1$

$\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}<\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}<\int_0^1 dt$

$\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$ において，$t=\tan\theta$ とおくと

$\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

t と θ の対応は右のようになる。

t	$0\to1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

よって

$\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$

また，$\int_0^1 dt=1$

よって，$\frac{\pi}{4}<\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}<1$ ……Ⓑ

次に，(1)②より，$t\geqq1$ において

$\frac{1}{\sqrt2 t^2}\leqq\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}<\frac{1}{t^2}$

$\int_1^x\frac{dt}{\sqrt2 t^2}<\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}<\int_1^x\frac{dt}{t^2}$

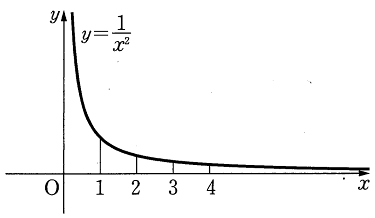
$\left[-\frac{1}{\sqrt2 t}\right]_1^x<\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}<\left[-\frac1t\right]_1^x$

$\frac{1}{\sqrt2}\left(1-\frac1x\right)<\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}<1-\frac1x$ ……Ⓒ

Ⓐ，Ⓑ，Ⓒより

$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt2}\left(1-\frac1x\right)<\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}<2-\frac1x$

2



$f(x)=\frac{1}{x^2}$ は $x>0$ で減少関数であるから，

$k\leqq x\leqq k+1$ （k は自然数）において

$\frac{1}{(k+1)^2}\leqq\frac{1}{x^2}\leqq\frac{1}{k^2}$

$\int_k^{k+1}\frac{1}{(k+1)^2}dx<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^2}<\int_k^{k+1}\frac{1}{k^2}dx$

$\frac{1}{(k+1)^2}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^2}<\frac{1}{k^2}$ ……①

①で $k=1,\ 2,\ ……,\ n$ とおいた式を辺ごとに加えて

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^2}<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

ここで

$\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac1x\right]_1^{n+1}$

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+……+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{n}{n+1}$ より

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+……+\frac{1}{n^2}<\frac{n}{n+1}+1-\frac{1}{(n+1)^2}$

$=\frac{n(n+1)+(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$

$=\frac{2n^2+3n}{(n+1)^2}$

$=\frac{n(2n+3)}{(n+1)^2}$

以上より

$\frac{n}{n+1}<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+……+\frac{1}{n^2}<\frac{n(2n+3)}{(n+1)^2}$

が成り立つ。

3 (1) $f'(x)=2\sin2x$

(2) $f'(x)=(e-1)(e^x-2e^{-x-1})$

解説 (1) $f'(x)=(\sin2x)\cdot(2x)'$

$=2\sin2x$

(2) $f(x)=\int_0^{x+1}(e^t+2e^{-t})dt-\int_0^x(e^t+2e^{-t})dt$

よって

$f'(x)=e^{x+1}+2e^{-(x+1)}-(e^x+2e^{-x})$

$=(e-1)e^x-2(e-1)e^{-(x+1)}$

$=(e-1)(e^x-2e^{-x-1})$

（注）

定積分を計算してから微分してもよい。

$f(x)$

$=\left[e^t-2e^{-t}\right]_x^{x+1}$

$=e^{x+1}-2e^{-(x+1)}-e^x+2e^{-x}$

$=(e-1)(e^x+2e^{-x-1})$

よって

$f'(x)=(e-1)(e^x-2e^{-x-1})$

4 $x=\frac32$

解説 $f(x)=\int_0^x t^2(t-1)dt-x\int_0^x t(t-1)dt$

よって

$f'(x)=x^2(x-1)-\int_0^x t(t-1)dt-x\cdot x(x-1)$

$=-\int_0^x(t^2-t)dt$

$=-\left[\frac13t^3-\frac12t^2\right]_0^x$

$=-\frac13x^3+\frac12x^2$

$=-\frac16x^2(2x-3)$

x	…	0	…	$\frac32$	…
$f'(x)$	＋	0	＋	0	－
$f(x)$	↗		↗	極大	↘

$f(x)$ の増減表は上のようになるから，$x=\frac32$ のときに最大値をとる。

5 $f(x)=x+2\cos x-\frac{\pi-1}{2}$

解説 $\int_0^{\frac\pi2}f(t)\cos t\,dt=k$ とおくと

$f(x)=x+2\cos x-k$

$k=\int_0^{\frac\pi2}(t+2\cos t-k)\cos t\,dt$

$=\int_0^{\frac\pi2}(t\cos t+2\cos^2t-k\cos t)dt$

$=\int_0^{\frac\pi2}(t\cos t+1+\cos2t-k\cos t)dt$

$=\int_0^{\frac\pi2}\{t\cdot(\sin t)'+1+\cos2t-k\cos t\}dt$

$=\left[t\sin t+t+\frac12\sin2t-k\sin t\right]_0^{\frac\pi2}$

$-\int_0^{\frac\pi2}\sin t\,dt$

$=\frac\pi2+\frac\pi2-k-\left[-\cos t\right]_0^{\frac\pi2}$

$=\pi-k-1$

よって，$2k=\pi-1$ より

$k=\frac{\pi-1}{2}$

ゆえに，$f(x)=x+2\cos x-\frac{\pi-1}{2}$

6 (1) $I_n=e-ne+n(n-1)I_{n-2}$

(2) $-44e+120$

解説 (1) $n\geqq3$ のとき

$I_n=\int_1^e(\log x)^n dx$

$=\int_1^e(x)'(\log x)^n dx$

$=\left[x(\log x)^n\right]_1^e-\int_1^e x\cdot n(\log x)^{n-1}\cdot\frac1x dx$

$=e-n\int_1^e(\log x)^{n-1}dx$

$=e-n\left\{e-(n-1)\int_1^e(\log x)^{n-2}dx\right\}$

$=e-ne+n(n-1)I_{n-2}$

(2) $I_1=\int_1^e\log x\,dx$

$=\left[x\log x\right]_1^e-\int_1^e dx$

$=e-(e-1)=1$

よって，$I_3=e-3e+3\cdot2\cdot1$

$=-2e+6$

$I_5=e-5e+5\cdot4(-2e+6)$

$=e-5e-40e+120$

$=-44e+120$

P.131 入試問題演習

STEP 1

1 (1) $1-\cos x\geqq0$ であるから，

$n\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$ において

$\frac{1-\cos x}{(n+1)^2\pi^2}\leqq\frac{1-\cos x}{x^2}\leqq\frac{1-\cos x}{n^2\pi^2}$

$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{(n+1)^2\pi^2}dx\leqq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$

$\leqq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{n^2\pi^2}dx$

ここで，$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(1-\cos x)dx$

$=\left[x-\sin x\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi}=\pi$

が成り立つから

$\frac{\pi}{(n+1)^2\pi^2}\leqq S_n\leqq\frac{\pi}{n^2\pi^2}$

すなわち，$\frac{1}{\pi(n+1)^2}\leqq S_n\leqq\frac{1}{\pi n^2}$ が成り立つ。

(2) $\frac\pi3$

解説 (2) (1)より，k を自然数とすると

$\pi(k+1)^2\geqq\frac{1}{S_k}\geqq\pi k^2$

$\pi\sum_{k=1}^n(k+1)^2\geqq\sum_{k=1}^n\frac{1}{S_k}\geqq\pi\sum_{k=1}^n k^2$

$\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^n(k+1)^2\geqq\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n\frac{1}{S_k}\geqq\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2$

ここで

$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^n(k+1)^2$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k+1}{n}\right)^2$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left\{\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2-\frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{\pi}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\pi\int_0^1 x^2\,dx+\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{1}{n^2}\right\}$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{3}$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$

$$=\pi\int_0^1 x^2\,dx$$

$$=\frac{\pi}{3}$$

よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=\frac{\pi}{3}$$

2 $\boldsymbol{f(x)=x^2+2x+2}$

解説 題意より

$$\int_0^x tf(t)\,dt-x\int_0^x f(t)\,dt+f(x)$$

$$=-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+2x+2 \quad \cdots\cdots①$$

①の両辺を x で微分して

$$xf(x)-\int_0^x f(t)\,dt-xf(x)+f'(x)$$

$$=-\frac{1}{3}x^3-x^2+2$$

$$\int_0^x f(t)\,dt-f'(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2$$

さらに両辺を x で微分して

$f(x)-f''(x)=x^2+2x \quad \cdots\cdots②$

$f(x)=ax^2+bx+c$ のとき

$f'(x)=2ax+b$

$f''(x)=2a$

よって，②より

$ax^2+bx+c-2a=x^2+2x$

したがって，$a=1$，$b=2$，$c-2a=0$

よって，$c=2$

以上より，$f(x)=x^2+2x+2$

このとき，与えられた等式は確かに成り立つ。

3 (1) $\boldsymbol{x=-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}}$ (2) $\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}$

解説 (1) $f(x)=\displaystyle\int_0^{x+1}\frac{t}{4t^2+3}\,dt-\int_0^x\frac{t}{4t^2+3}\,dt$ より

$f'(x)$

$$=\frac{x+1}{4(x+1)^2+3}-\frac{x}{4x^2+3}$$

$$=\frac{x+1}{4x^2+8x+7}-\frac{x}{4x^2+3}$$

$$=\frac{(x+1)(4x^2+3)-x(4x^2+8x+7)}{(4x^2+8x+7)(4x^2+3)}$$

$$=\frac{-4x^2-4x+3}{(4x^2+8x+7)(4x^2+3)}$$

$$=-\frac{(2x+3)(2x-1)}{(4x^2+8x+7)(4x^2+3)}$$

ゆえに，$f'(x)=0$ の解は，$x=-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2}$

(2) $4x^2+8x+7>0$，$4x^2+3>0$ であるから，(1)より，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

したがって，極大となる x の値は

$$x=\frac{1}{2}$$

4 (1) $\boldsymbol{f(x)=(n+1)x^n-nx^{n-1}}$

(2) $\boldsymbol{f(x)=2x+1}$

解説 (1) 与えられた等式より

$$\int_1^x f(t)\,dt=x^n(x-1)$$

$$=x^{n+1}-x^n$$

両辺を x で微分して

$f(x)=(n+1)x^n-nx^{n-1}$

(2) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=\frac{1}{2}\{f(x)+f(a)\}(x-a)$

両辺を x で微分して

$$f(x)=\frac{1}{2}f'(x)(x-a)+\frac{1}{2}\{f(x)+f(a)\}$$

$f(x)=f(a)+f'(x)(x-a)$

$x=0$ を代入して，$f(0)=1$，$f'(0)=2$ を用いると

$1=f(a)-2a$

$f(a)=2a+1$

これが任意の a に対して成り立ち，$f(x)$ は微分可能より連続であるから，求める関数は

$f(x)=2x+1$

STEP 2

1 (1) $\boldsymbol{g(x)=\dfrac{1}{a}(e^{ax}-1)}$

(2) $\boldsymbol{g(x)=\dfrac{1}{a^2+1}(e^{ax}-a\sin x-\cos x)}$

(3) $\boldsymbol{f(x)=\cos x-a\sin x}$

解説 (1) $g(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-a(t-x)}\,dt$

$$=e^{ax}\int_0^x e^{-at}\,dt$$

$$=e^{ax}\left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_0^x$$

$$=-\frac{1}{a}e^{ax}(e^{-ax}-1)$$

$$=\frac{1}{a}(e^{ax}-1)$$

(2) $g(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-a(t-x)}\sin t\,dt$

$$=e^{ax}\int_0^x e^{-at}\sin t\,dt$$

$I=\displaystyle\int_0^x e^{-at}\sin t\,dt$ とおくと

$$I=\left[-\frac{1}{a}e^{-at}\sin t\right]_0^x+\frac{1}{a}\int_0^x e^{-at}\cos t\,dt$$

$$=-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin x+\frac{1}{a}\left(\left[-\frac{1}{a}e^{-at}\cos t\right]_0^x\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a}\int_0^x e^{-at}\sin t\,dt\right)$$

$$=-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin x$$

$$+\frac{1}{a}\left\{-\frac{1}{a}\left(e^{-ax}\cos x-1\right)\right\}-\frac{1}{a^2}I$$

$$\left(1+\frac{1}{a^2}\right)I=-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin x-\frac{1}{a^2}e^{-ax}\cos x$$

$$+\frac{1}{a^2}$$

$$\frac{a^2+1}{a^2}I=\frac{1}{a^2}(1-ae^{-ax}\sin x-e^{-ax}\cos x)$$

$$I=\frac{1}{a^2+1}(1-ae^{-ax}\sin x-e^{-ax}\cos x)$$

ゆえに

$$g(x)=\frac{1}{a^2+1}(e^{ax}-a\sin x-\cos x)$$

(参考)

$\displaystyle\int_0^x e^{-at}\sin t\,dt$ を求めるのに，次のようにしてもよい。

$(e^{-at}\sin t)'=-ae^{-at}\sin t+e^{-at}\cos t$

$\cdots\cdots①$

$(e^{-at}\cos t)'=-ae^{-at}\cos t-e^{-at}\sin t$

$\cdots\cdots②$

①$\times a+$② より

$\{e^{-at}(a\sin t+\cos t)\}'=-(a^2+1)e^{-at}\sin t$

よって

$$\int e^{-at}\sin t\,dt=-\frac{e^{-at}(a\sin t+\cos t)}{a^2+1}+C$$

$$\int_0^x e^{-at}\sin t\,dt=-\left[\frac{e^{-at}(a\sin t+\cos t)}{a^2+1}\right]_0^x$$

$$=\frac{1-e^{-ax}(a\sin x+\cos x)}{a^2+1}$$

(3) $\sin x=e^{ax}\displaystyle\int_0^x e^{-at}f(t)\,dt \quad \cdots\cdots①$

①の両辺を x で微分して

$$\cos x=ae^{ax}\int_0^x e^{-at}f(t)\,dt+e^{ax}e^{-ax}f(x)$$

$$\cos x=ae^{ax}\int_0^x e^{-at}f(t)\,dt+f(x) \quad \cdots\cdots②$$

②$-$①$\times a$ より

$\cos x-a\sin x=f(x)$

第27講　積分の応用(2)・—面積①—

P.133〜P.134　類題

1　(1)　**4**　　(2)　**log7**　　(3)　$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

解説 (1)　$\displaystyle\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}=\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^9$

$=2(3-1)=4$

(2)　$\displaystyle\int_1^3 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\int_1^3 \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx$

$=\left[\log(x^2-x+1)\right]_1^3$

$=\log 7$

(3)　$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}(-\cos 2x)dx$

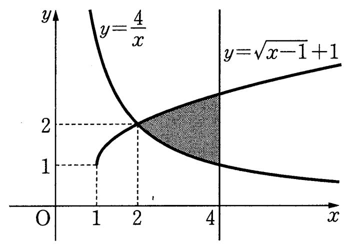
$=-\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}$

$=-\left(\frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{2}\sin\pi\right)$

$=-\left\{\frac{1}{2}\cdot(-1)\right\}=\frac{1}{2}$

2　(1)　$\boldsymbol{2\sqrt{3}+\frac{4}{3}-4\log 2}$　　(2)　$\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

解説 (1)　$y=\sqrt{x-1}+1$ は単調増加，$y=\frac{4}{x}$ は $x>0$ において単調減少であり，ともに$(2,\ 2)$を通るから，この点がただ1つの交点である。



$2\leqq x\leqq 4$ において，$\sqrt{x-1}+1\geqq\frac{4}{x}$ であるから，求める面積は

$\displaystyle\int_2^4\left(\sqrt{x-1}+1-\frac{4}{x}\right)dx$

$=\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+x-4\log x\right]_2^4$

$=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)+(4-2)-4(\log 4-\log 2)$

$=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}+2-4\log 2$

$=2\sqrt{3}+\frac{4}{3}-4\log 2$

(2)　$\cos x=\cos 2x$ とすると

$\cos x=2\cos^2 x-1$

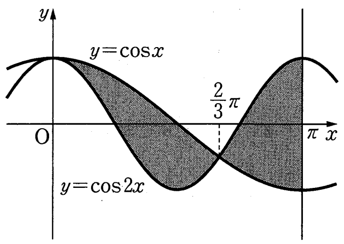
$2\cos^2 x-\cos x-1=0$

$(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$

$\cos x=-\frac{1}{2},\ 1$

$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲でこれを満たす x の値は

$x=0,\ \frac{2}{3}\pi$



$0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi$ において，$\cos x\geqq\cos 2x$

$\frac{2}{3}\pi\leqq x\leqq\pi$ において，$\cos x\leqq\cos 2x$

であるから，求める面積は

$\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\cos x-\cos 2x)dx$

$\displaystyle+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(\cos 2x-\cos x)dx$

$=\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$

$+\left[\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$

$=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

$-\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

3　(1)　$\boldsymbol{\frac{1}{3}(e^3-e)}$　　(2)　$\boldsymbol{\frac{9}{2}}$

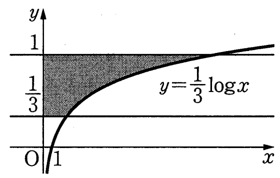
解説 (1)　$y=\frac{1}{3}\log x$ を x について解くと，

$\log x=3y$ より

$x=e^{3y}$

(>0)

よって，求める面積は



$\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^1 e^{3y}dy$

$=\left[\frac{1}{3}e^{3y}\right]_{\frac{1}{3}}^1$

$=\frac{1}{3}(e^3-e)$

(2)　与式をそれぞれ x について解くと

$x=y^2-3$　……①

$x=-y-1$　……②

①，②の交点の y 座標は

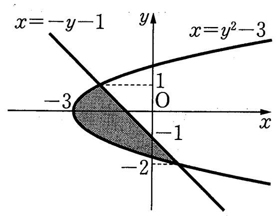
$y^2-3=-y-1$

を解いて

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$y=-2,\ 1$



$-2\leqq y\leqq 1$ において，$y^2-3\leqq -y-1$ であるから，求める面積は

$\displaystyle\int_{-2}^1\{-y-1-(y^2-3)\}dy$

$\displaystyle=\int_{-2}^1(-y^2-y+2)dy$

$\displaystyle=-\int_{-2}^1(y+2)(y-1)dy$

$=\frac{1}{6}\{1-(-2)\}^3$

$=\frac{9}{2}$

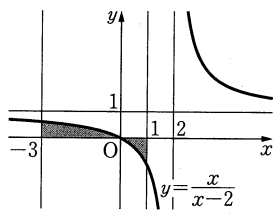
P.135　演習問題

1　(1)　**4log2−2log5+2**　　(2)　$\boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{5}{3}}$

(3)　$\boldsymbol{2-\frac{\pi}{2}}$　　(4)　$\boldsymbol{\frac{32\sqrt{2}}{3}}$

(5)　**π−2**

解説 (1)



$-3\leqq x\leqq 0$ のとき，$\frac{x}{x-2}\geqq 0$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$\frac{x}{x-2}\leqq 0$

また，$\frac{x}{x-2}=\frac{2}{x-2}+1$ であるから，求める面積は

$\displaystyle\int_{-3}^0\left(\frac{2}{x-2}+1\right)dx+\int_0^1\left(-\frac{2}{x-2}-1\right)dx$

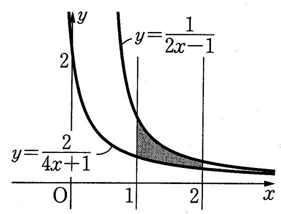
$=\left[2\log|x-2|+x\right]_{-3}^0$

$+\left[-2\log|x-2|-x\right]_0^1$

$=2\log 2-(2\log 5-3)-1-(-2\log 2)$

$=4\log 2-2\log 5+2$

(2)



$\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{4x+1}=\frac{3}{(2x-1)(4x+1)}$

よって，$1\leqq x\leqq 2$ において

$\frac{1}{2x-1}>\frac{2}{4x+1}$

求める面積は

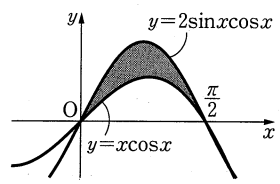
$\displaystyle\int_1^2\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{4x+1}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{2}\log(2x-1)-\frac{1}{2}\log(4x+1)\right]_1^2$

$=\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{2}\log 9-\left(-\frac{1}{2}\log 5\right)$

$=\frac{1}{2}\log\frac{5}{3}$

(3)



$2\sin x\cos x-x\cos x=(2\sin x-x)\cos x$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ において，$\cos x\geqq 0$

また，$f(x)=2\sin x-x$ とおくと

$f'(x)=2\cos x-1$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	極大	↘	

増減表は上のようになり

$f(0)=0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2-\frac{\pi}{2}>0$

より，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ において，$f(x)\geqq 0$

よって，$2\sin x\cos x\geqq x\cos x$

求める面積は

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x\cos x-x\cos x)\,dx$

$=\left[\sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$=1-\frac{\pi}{2}+\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=2-\frac{\pi}{2}$

(4) $x\sqrt{8-x^2}=0$ とすると

$x=0,\ \pm2\sqrt{2}$

$0\leqq x\leqq2\sqrt{2}$ において

$x\sqrt{8-x^2}\geqq0$

グラフは原点に関して対称であるから，求める面積は

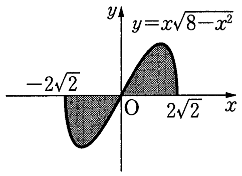
$2\int_0^{2\sqrt{2}}x\sqrt{8-x^2}\,dx$

$=2\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(8-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\sqrt{2}}$

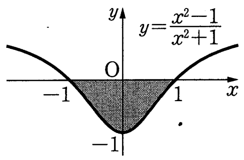
$=\frac{2}{3}\cdot8^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{2}{3}\cdot2^{\frac{9}{2}}$

$=\frac{32\sqrt{2}}{3}$



(5)



$\frac{x^2-1}{x^2+1}=0$ とすると，$x=\pm1$

$x=\tan\theta$ とおくと，$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$-1\leqq x\leqq1$ において

$\frac{x^2-1}{x^2+1}\leqq0$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$-1\to1$
θ	$-\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{4}$

求める面積は

$-\int_{-1}^{1}\frac{x^2-1}{x^2+1}dx$

$=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2\theta-1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$=-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2\theta-1)\,d\theta$

$=-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-2\right)d\theta$

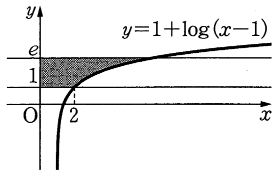
$=-2\left[\tan\theta-2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=-2\left(1-\frac{\pi}{2}\right)$

$=\pi-2$

2 (1) $e^{e-1}+e-2$ (2) $\frac{13}{3}-\log3$ (3) $\frac{1}{2}\log2$

解説 (1)



$y=1+\log(x-1)$ を x について解くと

$y-1=\log(x-1)$

$e^{y-1}=x-1$

$x=e^{y-1}+1$

よって，求める面積は

$\int_1^e(e^{y-1}+1)\,dy$

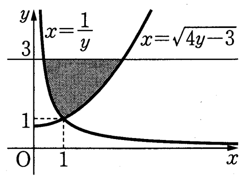
$=\left[e^{y-1}+y\right]_1^e$

$=e^{e-1}+e-(1+1)$

$=e^{e-1}+e-2$

(2) $\sqrt{4y-3}=\frac{1}{y}$

とすると



$4y-3=\frac{1}{y^2}$

$4y^3-3y^2-1=0$

$(y-1)(4y^2+y+1)=0$

よって，2曲線は(1，1)で交わる。

したがって，求める面積は

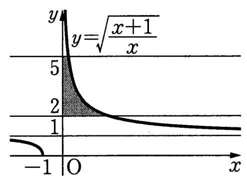
$\int_1^3\left(\sqrt{4y-3}-\frac{1}{y}\right)dy$

$=\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(4y-3)^{\frac{3}{2}}-\log y\right]_1^3$

$=\frac{1}{6}\cdot9^{\frac{3}{2}}-\log3-\frac{1}{6}$

$=\frac{13}{3}-\log3$

(3)



$y=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$ より，$y^2=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$

これを x について解くと

$\frac{1}{x}=y^2-1$

$x=\frac{1}{y^2-1}$

求める面積は

$\int_2^5\frac{dy}{y^2-1}=\int_2^5\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy$

$=\frac{1}{2}\left[\log|y-1|-\log|y+1|\right]_2^5$

$=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right]_2^5$

$=\frac{1}{2}\left(\log\frac{2}{3}-\log\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{1}{2}\log2$

3 (1) $M=7$ (2) $x=1,\ \pm\sqrt{3}$

(3) $\frac{32\sqrt{3}}{5}$

解説 (1) $f'(x)$

$=4x^3-6x^2-4x+6$

$=2(2x^3-3x^2-2x+3)$

$=2(x-1)(2x^2-x-3)$

$=2(x-1)(2x-3)(x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

$f(x)$ は上のように増減するから

$M=f(1)=7$

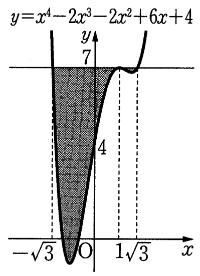
(2) $f(x)=7$ より

$x^4-2x^3-2x^2+6x-3=0$

$(x-1)^2(x^2-3)=0$

よって，$x=1,\ \pm\sqrt{3}$

(3)



$-\sqrt{3}\leqq x\leqq\sqrt{3}$ において，$f(x)\leqq7$

求める面積は

$-\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^4-2x^3-2x^2+6x-3)\,dx$

$=-2\int_0^{\sqrt{3}}(x^4-2x^2-3)\,dx$

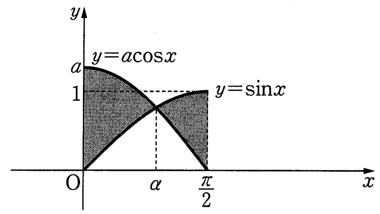
$=-2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3-3x\right]_0^{\sqrt{3}}$

$=-2\left(\frac{9\sqrt{3}}{5}-2\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$

$=\frac{32\sqrt{3}}{5}$

4 $a=\frac{3}{4}$，$S_1=\frac{1}{4}$

解説



$a\cos x=\sin x$ は上の図より，$0<x<\frac{\pi}{2}$ にただ1つの解をもつ。この解を α とすると

$a\cos\alpha=\sin\alpha$

$a=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$S_1=\int_0^{\alpha}(a\cos x-\sin x)\,dx$

$=\left[a\sin x+\cos x\right]_0^{\alpha}$

$=a\sin\alpha+\cos\alpha-1$

$S_2=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-a\cos x)\,dx$

$=\left[-\cos x-a\sin x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$

$=-a+\cos\alpha+a\sin\alpha$

よって，$2S_1=S_2$ より

$2(a\sin\alpha+\cos\alpha-1)=-a+\cos\alpha+a\sin\alpha$

$a\sin\alpha+\cos\alpha+a-2=0$

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-2=0$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha-2\cos\alpha=0$

$\sin\alpha=2\cos\alpha-1$

$\sin^2\alpha=4\cos^2\alpha-4\cos\alpha+1$

$1-\cos^2\alpha=4\cos^2\alpha-4\cos\alpha+1$

$5\cos^2\alpha-4\cos\alpha=0$

$\cos\alpha>0$ であるから，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$

このとき，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$ であるから，$a=\frac{3}{4}$

$S_1=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-1=\frac{1}{4}$

P.136 **入試問題演習**

STEP 1

1 (1) 最大値 $\frac{9}{2}$，最小値 3

(2) $S=2\pi+4\sqrt{3}$

解説 (1) $f(x)$

$=1-2\sin^2x+2\sqrt{3}\sin x+2$

$=-2\sin^2x+2\sqrt{3}\sin x+3$

$=-2\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$

$0\leqq x\leqq\pi$ より，$0\leqq\sin x\leqq1$ であるから，$f(x)$ は $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，すなわち $x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi$ のときに最大値 $\frac{9}{2}$ を，$\sin x=0$ のとき，すなわち $x=0$，π のときに最小値 3 をとる。

(2) (1)より，$0\leqq x\leqq\pi$ において $f(x)>0$ がつねに成り立つから，求める面積は

$S=\int_0^{\pi}(\cos2x+2\sqrt{3}\sin x+2)dx$

$=\left[\frac{1}{2}\sin2x-2\sqrt{3}\cos x+2x\right]_0^{\pi}$

$=(2\sqrt{3}+2\pi)-(-2\sqrt{3})$

$=2\pi+4\sqrt{3}$

2 (1) $x=1$，e　(2) 最大値 $\frac{1}{4}$，$x=\sqrt{e}$

(3) $3-e$

解説 (1) $f(x)=0$ より，$\log x(\log x-1)=0$

よって，$x=1$，e

(2) $f(x)=-\left(\log x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

よって $f(x)$ は，$\log x=\frac{1}{2}$ のとき，すなわち $x=\sqrt{e}$ のときに最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

(3) $\int_1^e\{-(\log x)^2+\log x\}dx$

$=\int_1^e\{-(x)'(\log x)^2+\log x\}dx$

$=\left[-x(\log x)^2\right]_1^e+\int_1^e2\log x\,dx+\int_1^e\log x\,dx$

$=-e+3\int_1^e\log x\,dx$

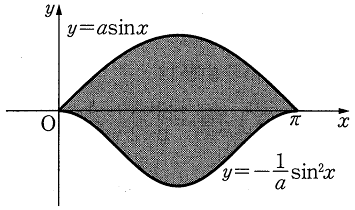
$=-e+3\left[x\log x\right]_1^e-3\int_1^e dx$

$=-e+3e-3\left[x\right]_1^e=2e-3(e-1)$

$=3-e$

3 (1) $S(a)=2a+\frac{\pi}{2a}$　(2) $2\sqrt{\pi}$

解説 (1)



$S(a)$

$=\int_0^{\pi}\left(a\sin x+\frac{1}{a}\sin^2x\right)dx$

$=\int_0^{\pi}\left(a\sin x+\frac{1-\cos2x}{2a}\right)dx$

$=\left[-a\cos x+\frac{x}{2a}-\frac{\sin2x}{4a}\right]_0^{\pi}$

$=\left(a+\frac{\pi}{2a}\right)-(-a)$

$=2a+\frac{\pi}{2a}$

(2) $a>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$S(a)\geqq2\sqrt{2a\cdot\frac{\pi}{2a}}=2\sqrt{\pi}$

ここで，$2a=\frac{\pi}{2a}$ より，$a=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ のときに等号が成り立つから，このとき $S(a)$ は最小値 $2\sqrt{\pi}$ をとる。

STEP2

1 $\frac{1}{4}$

解説 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$f(x)\geqq0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積は

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\tan^4x)\tan^nx\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2x)(1-\tan^2x)\tan^nx\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2x}(\tan^nx-\tan^{n+2}x)dx$

$=\left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x-\frac{1}{n+3}\tan^{n+3}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}$

よって，題意より

$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}=\frac{2}{35}$

$35\{(n+3)-(n+1)\}=2(n+1)(n+3)$

$70=2(n^2+4n+3)$

$35=n^2+4n+3$

$n^2+4n-32=0$

$(n+8)(n-4)=0$

n は自然数であるから，$n=4$

このとき

$f(x)=(1-\tan^4x)\tan^4x$

$=-\tan^8x+\tan^4x$

$=-\left(\tan^4x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$y=\tan x$ は単調増加であり，$0\leqq\tan x\leqq1$ であるから，$\tan^4x=\frac{1}{2}$ を満たす x は，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ にただ1つ存在し，このとき $f(x)$ は最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

2 (1) $-\frac{2}{15}(3x+2)(1-x)\sqrt{1-x}+C$

(2) $a=1-\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$

解説 (1) $\sqrt{1-x}=t$ とおくと

$x=1-t^2$，$\frac{dx}{dt}=-2t$

$\int x\sqrt{1-x}\,dx$

$=\int(1-t^2)t\cdot(-2t)dt$

$=\int(-2t^2+2t^4)dt$

$=-\frac{2}{3}t^3+\frac{2}{5}t^5+C$

$=-\frac{2}{15}(5-3t^2)t^3+C$

$=-\frac{2}{15}\{5-3(1-x)\}(1-x)\sqrt{1-x}+C$

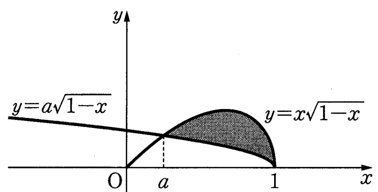
$=-\frac{2}{15}(3x+2)(1-x)\sqrt{1-x}+C$

(2) $x\sqrt{1-x}=a\sqrt{1-x}$ とすると

$\sqrt{1-x}(x-a)=0$

よって，$0<a<1$ より，$0\leqq x\leqq1$ において，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は

$x=1$，a



曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積は

$\int_0^1x\sqrt{1-x}\,dx$

$=\left[-\frac{2}{15}(3x+2)(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1=\frac{4}{15}$

左下の図で色のついた部分の面積は

$\int_a^1(x\sqrt{1-x}-a\sqrt{1-x})dx$

$=\left[-\frac{2}{15}(3x+2)(1-x)\sqrt{1-x}+\frac{2}{3}a(1-x)\sqrt{1-x}\right]_a^1$

$=\frac{2}{15}(3a+2)(1-a)\sqrt{1-a}-\frac{2}{3}a(1-a)\sqrt{1-a}$

$=\left\{\frac{2}{15}(3a+2)-\frac{2}{3}a\right\}(1-a)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{15}(1-a)^{\frac{5}{2}}$

題意より

$\frac{4}{15}(1-a)^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{15}$

$(1-a)^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}$

$1-a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$

ゆえに，$a=1-\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$

第28講　積分の応用(3)　―面積②―

P.137〜P.139　**類題**

1　$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

解説　$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{-x-2}}$ であるから，接点を P$(a,\ \sqrt{-a-2})$ とすると，ℓ の方程式は

$$y-\sqrt{-a-2}=-\frac{1}{2\sqrt{-a-2}}(x-a)$$

これが原点を通るから

$$-\sqrt{-a-2}=-\frac{1}{2\sqrt{-a-2}}\cdot(-a)$$

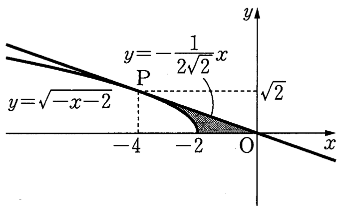
$$2(-a-2)=-a$$

$$a=-4$$

よって，接点はP$(-4,\ \sqrt{2})$，接線は

$y-\sqrt{2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\{x-(-4)\}$ より，$y=-\frac{1}{2\sqrt{2}}x$

$y=f(x)$ と ℓ のグラフの概形は次の図のようになる。



したがって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot4\cdot\sqrt{2}-\int_{-4}^{-2}\sqrt{-x-2}\,dx$$

$$=2\sqrt{2}-\left[-\frac{2}{3}(-x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-4}^{-2}$$

$$=2\sqrt{2}+\frac{2}{3}(0-2\sqrt{2})$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

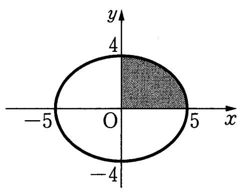
2　**20π**

解説　$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ を y について解くと，

$y^2=16\left(1-\frac{x^2}{25}\right)$ より

$$y=\pm4\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}$$

この楕円は，x 軸，y 軸に関して対称であるから，求める面積は，右の図で色をつけた部分の面積の4倍である。



よって

$$S=4\int_0^5 4\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\,dx$$

$$=\frac{16}{5}\int_0^5\sqrt{25-x^2}\,dx$$

ここで，$\int_0^5\sqrt{25-x^2}\,dx$ は，半径5の円の $\frac{1}{4}$ の面積を表すから

$$\frac{16}{5}\int_0^5\sqrt{25-x^2}\,dx$$

$$=\frac{16}{5}\cdot5^2\pi\cdot\frac{1}{4}$$

$$=20\pi$$

3　$\frac{8}{3}$

解説　この曲線が x 軸と交わるときの t の値を求めると，$8t^2-2=0$ より，$t^2=\frac{1}{4}$

$$t=\pm\frac{1}{2}$$

$t=\frac{1}{2}$ のとき $x=2$，$t=-\frac{1}{2}$ のとき $x=0$

また，$\frac{dx}{dt}=2$ であり，x と t の対応は右のようになる。

x	$0\ \to\ 2$
t	$-\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ において $y\leqq0$ であるから，求める面積は

$$-\int_0^2 y\,dx=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(8t^2-2)\cdot2\,dt$$

$$=-8\int_0^{\frac{1}{2}}(4t^2-1)\,dt$$

$$=-8\left[\frac{4}{3}t^3-t\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=-8\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{3}$$

4　(1)　**$y=-x+3\pi+4$**　　(2)　**$10-3\pi$**

解説(1)　$\frac{dx}{d\theta}=2-2\cos\theta$

$$\frac{dy}{d\theta}=2\sin\theta$$

よって，$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき，$x=2\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)=3\pi+2$

$$y=2\cdot1=2$$

であるから

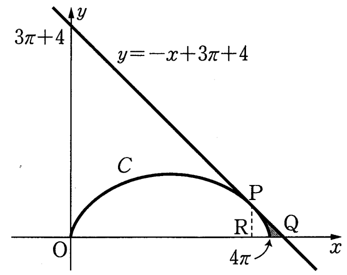
P$(3\pi+2,\ 2)$

また，このとき，$\frac{dy}{dx}=-1$

よって，ℓ は

$y-2=-(x-3\pi-2)$

$y=-x+3\pi+4$



(2)　ℓ と x 軸の交点は，Q$(3\pi+4,\ 0)$

Pから x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点は，R$(3\pi+2,\ 0)$

よって，QR$=2$

$$\triangle\text{PQR}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$$

C と2つの線分PR，QRで囲まれた部分の面積は

$$\int_{3\pi+2}^{4\pi}y\,dx$$

$$=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}y\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}2(1-\cos\theta)\cdot2(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$=4\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=4\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\{4-8\cos\theta+2(1+\cos2\theta)\}\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}(6-8\cos\theta+2\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=\left[6\theta-8\sin\theta+\sin2\theta\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$$

$$=12\pi-(9\pi+8)$$

$$=3\pi-8$$

ゆえに，求める面積は

$$2-(3\pi-8)=10-3\pi$$

P.140　**演習問題**

1　(1)　**$y=-x+3$**　　(2)　**4**

解説(1)　$y'=-\frac{\log x+2}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$

$$=-\frac{\log x+1}{x^2}$$

$x=1$ のとき，$y=2$，$y'=-1$

よって，ℓ の方程式は

$y-2=-(x-1)$

$y=-x+3$

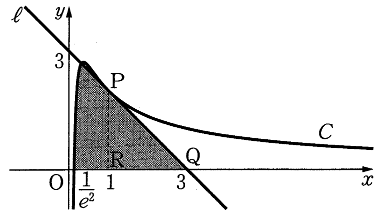
(2)　C の方程式で $y=0$ とおくと，$\log x+2=0$ より

$$x=\frac{1}{e^2}$$

ℓ の方程式で $y=0$ とおくと

$x=3$

よって，Q$(3,\ 0)$，R$(1,\ 0)$ とすると



$$\triangle\text{PQR}=\frac{1}{2}\cdot2^2=2$$

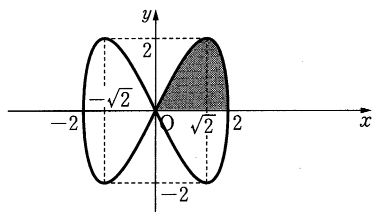
$\frac{1}{e^2}\leqq x\leqq1$ において，$\frac{1}{x}(\log x+2)\geqq0$ が成り立ち，求める面積は

$$\int_{\frac{1}{e^2}}^{1}\frac{1}{x}(\log x+2)\,dx+2$$

$$=\left[\frac{1}{2}(\log x+2)^2\right]_{\frac{1}{e^2}}^{1}+2$$

$$=4$$

2　(1)



(2)　$\frac{32}{3}$

解説(1)　$y=\pm x\sqrt{4-x^2}$ より，$f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ とおくと

$$f'(x)=\sqrt{4-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$=-\frac{2(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f(x)$ の定義域は $4-x^2\geqq0$ より，$-2\leqq x\leqq2$ であり，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2	↘	0

$g(x)=-x\sqrt{4-x^2}$ のグラフは，$f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称であり，求めるグラフは解答の図のようになる。

(2)　この図形は，x 軸，y 軸に関して対称であ

るから，求める面積は(1)の図で色のついた部分の面積の4倍である。よって

$$4\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx=4\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$=\frac{4}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}=\frac{32}{3}$$

3 $\frac{36\sqrt{3}}{5}$

解説 $y=t(3-t^2)$ より，$y=0$ のとき，$t=0$，$\pm\sqrt{3}$

$0\leqq t\leqq\sqrt{3}$ において，$y\geqq 0$

$t=0$ のとき，$x=1$

$t=\sqrt{3}$ のとき，$x=-8$

また，$\frac{dx}{dt}=-6t$

x と t の対応は右のようになる。

x	$-8\to 1$
t	$\sqrt{3}\to 0$

求める面積は

$$\int_{-8}^{1} y\,dx$$

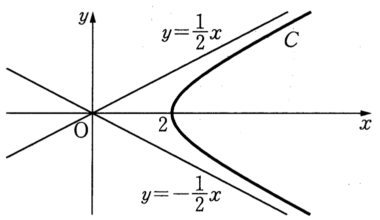
$$=\int_{\sqrt{3}}^{0}(3t-t^3)\cdot(-6t)\,dt=6\int_0^{\sqrt{3}}(3t^2-t^4)\,dt$$

$$=6\left[t^3-\frac{1}{5}t^5\right]_0^{\sqrt{3}}=6\left(3\sqrt{3}-\frac{9\sqrt{3}}{5}\right)$$

$$=\frac{36\sqrt{3}}{5}$$

4 (1) **2**

(2)



(3) $\boldsymbol{y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

(4) $\boldsymbol{4\sqrt{3}-2\log(2+\sqrt{3})}$

解説(1) $t>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$x=t+\frac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$$

$t=1$ のときに等号が成り立つから，x の最小値は2である。

(2) $x^2=t^2+2+\frac{1}{t^2}$，$y^2=\frac{1}{4}\left(t^2-2+\frac{1}{t^2}\right)$

よって，$x^2-4y^2=4$

また，$t>0$ のとき，(1)より $x\geqq 2$ であるから，y はすべての実数値をとる。

したがって，曲線 C は双曲線 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ の $x\geqq 2$ の部分である。

(3) $\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)=\frac{t^2+1}{2t^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t^2+1}{2t^2}\cdot\frac{t^2}{t^2-1}$$

$$=\frac{t^2+1}{2(t^2-1)}$$

よって，接線の傾きが $\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

$$\frac{t^2+1}{2(t^2-1)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}(t^2+1)=2(t^2-1)$$

$$(2-\sqrt{3})t^2=2+\sqrt{3}$$

$$t^2=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})^2$$

$t>0$ より，$t=2+\sqrt{3}$

このとき

$$x=2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}$$

$$=4$$

$$y=\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})\}$$

$$=\sqrt{3}$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y-\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(4) x 軸に関する対称性から，$y\geqq 0$ の部分の面積を求めて2倍すればよい。

$x=4$ のとき，$t+\frac{1}{t}=4$ より

$$t^2-4t+1=0$$

$$t=2\pm\sqrt{3}$$

2つの値のうち，$y\geqq 0$ となるのは

$$t=2+\sqrt{3}$$

求める面積は

$$2\int_2^4 y\,dx$$

$$=2\int_1^{2+\sqrt{3}}\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{t^2-1}{t^2}\,dt$$

$$=\int_1^{2+\sqrt{3}}\frac{(t^2-1)^2}{t^3}\,dt$$

$$=\int_1^{2+\sqrt{3}}\left(t-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2-2\log t-\frac{1}{2t^2}\right]_1^{2+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^2-2\log(2+\sqrt{3})$$

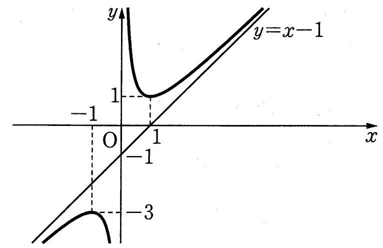
$$-\frac{1}{2(2+\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{1}{2}(7+4\sqrt{3})-2\log(2+\sqrt{3})$$

$$-\frac{1}{2}(7-4\sqrt{3})$$

$$=4\sqrt{3}-2\log(2+\sqrt{3})$$

5 (1)



(2) **最小値** $\boldsymbol{\frac{3}{8}+2\log 2}$，$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$

解説(1) $f(x)=x-1+\frac{1}{x}$ より

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{x^2-1}{x^2}$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-3	↘		↘	1	↗

$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(x-1)\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$ より，

$y=x-1$ は漸近線である。

また，$\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty$，$\lim_{x\to-0}f(x)=-\infty$

であるから，y 軸も漸近線で，グラフは解答のようになる。

(2) $S(a)$

$$=\int_a^{a+\frac{3}{2}}\left(x-1+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-x+\log|x|\right]_a^{a+\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(a+\frac{3}{2}\right)^2-a^2\right\}-\frac{3}{2}+\log\left(a+\frac{3}{2}\right)-\log a$$

$$=\frac{3}{2}a-\frac{3}{8}+\log\left(a+\frac{3}{2}\right)-\log a$$

$$S'(a)=\frac{3}{2}+\frac{1}{a+\frac{3}{2}}-\frac{1}{a}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{2}{2a+3}-\frac{1}{a}$$

$$=\frac{3a(2a+3)+4a-2(2a+3)}{2a(2a+3)}$$

$$=\frac{6a^2+9a-6}{2a(2a+3)}$$

$$=\frac{3(2a-1)(a+2)}{2a(2a+3)}$$

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$S'(a)$		$-$	0	$+$
$S(a)$		↘	極小	↗

$a>0$ における $S(a)$ の増減表は上のようになるから，$a=\frac{1}{2}$ のとき $S(a)$ は最小となり，

最小値は

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{3}{8}+\log 2-\log\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{8}+2\log 2$$

P.141 入試問題演習

STEP 1

1 (1) $\boldsymbol{a=-4}$ (2) $\boldsymbol{x=-2}$ (3) $\boldsymbol{e^2-5}$

解説(1) $f'(x)=e^{-x}-(x-a)e^{-x}$

$$=(1+a-x)e^{-x}$$

$x=t$ における接線は

$$y-(t-a)e^{-t}=(1+a-t)e^{-t}\cdot(x-t)$$

接線が原点を通るとき

$$-(t-a)e^{-t}=(1+a-t)e^{-t}\cdot(-t)$$

$e^{-t}>0$ より，両辺を $-e^{-t}$ で割って

$$t-a=(1+a-t)t$$

$$t^2-at-a=0 \quad \cdots\cdots①$$

①がただ1つの解をもつとき

$$a^2+4a=0$$

よって，$a\neq 0$ より，$a=-4$

(2) (1)より，$f(x)=(x+4)e^{-x}$

$$f'(x)=-(x+3)e^{-x}$$

よって，$f''(x)=-e^{-x}+(x+3)e^{-x}$

$$=(x+2)e^{-x}$$

ゆえに，変曲点の x 座標は，$x=-2$

(3) $a=-4$ のとき①の解は

$$t=-2$$

$$f(-2)=2e^2$$

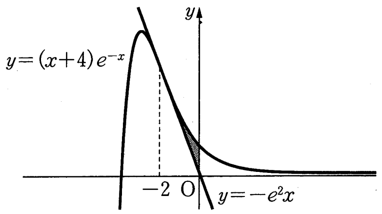
$$f'(-2)=-e^2$$

よって，接線は

$$y-2e^2=-e^2(x+2)$$

$$y=-e^2x$$

また，(2)より，$-2\leqq x\leqq 0$ において，曲線 $y=f(x)$ は下に凸である。



求める面積は

$$\int_{-2}^{0}\{(x+4)e^{-x}-(-e^2x)\}dx$$

$$=\left[-(x+4)e^{-x}+\frac{e^2}{2}x^2\right]_{-2}^{0}+\int_{-2}^{0}e^{-x}dx$$

$$=-4-(-2e^2+2e^2)+\left[-e^{-x}\right]_{-2}^{0}$$

$$=-4-1+e^2$$

$$=e^2-5$$

2 ア $-2\sqrt{2}\leqq x\leqq 2\sqrt{2}$ イ 2

ウ -2 エ 4π

解説 $x^2-2xy+2y^2=4$ を y について解くと

$2y^2-2xy+x^2-4=0$ より

$$y=\frac{x\pm\sqrt{x^2-2(x^2-4)}}{2}$$

$$=\frac{x\pm\sqrt{8-x^2}}{2}$$

$8-x^2\geqq 0$ より，$x^2\leqq 8$

$-2\sqrt{2}\leqq x\leqq 2\sqrt{2}$

$f(x)=\dfrac{x+\sqrt{8-x^2}}{2}$，$g(x)=\dfrac{x-\sqrt{8-x^2}}{2}$ とすると，つねに $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つ。

したがって，$-2\sqrt{2}\leqq x\leqq 2\sqrt{2}$ における $f(x)$ の最大値を考える。

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{-2x}{4\sqrt{8-x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{x}{2\sqrt{8-x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{8-x^2}-x}{2\sqrt{8-x^2}}$$

$f'(x)=0$ となるとき，$\sqrt{8-x^2}=x$

ここで，$\sqrt{8-x^2}\geqq 0$ より，$x\geqq 0$

両辺を2乗すると，$8-x^2=x^2$

$x^2=4$

$x=2$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\sqrt{2}$	↗	2	↘	$\sqrt{2}$

よって，y の最大値は2

また，$g(x)$ の最小値を考えると

$$g'(x)=\frac{\sqrt{8-x^2}+x}{2\sqrt{8-x^2}}$$

$g'(x)=0$ となるとき，$\sqrt{8-x^2}=-x$

$8-x^2=x^2$

$x^2=4$

$x\leqq 0$ であるから，$x=-2$

よって，$g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\sqrt{2}$	↘	-2	↗	$\sqrt{2}$

したがって，y が最小値をとるときの x の値は -2 である。

求める面積は

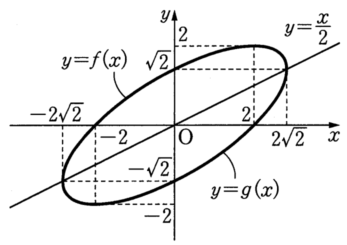
$$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{8-x^2}}{2}-\frac{x-\sqrt{8-x^2}}{2}\right)dx$$

$$=\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}\,dx$$

これは，半径 $2\sqrt{2}$ の円の半分の面積を表すから

$$\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2})^2\pi=4\pi$$



3 (1) $y=\dfrac{(\cos\theta-2)(x-2\theta)}{\sin\theta}$

(2) $S(\theta)=\dfrac{2\theta^2(2-\cos\theta)}{\sin\theta}$

(3) $T(\theta)=\dfrac{9}{2}\theta-3\sin\theta$ (4) $\dfrac{3}{4}$

解説 (1) $\dfrac{dx}{dt}=2-\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=\sin t$

よって，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t}{2-\cos t}$

これより，法線 ℓ_θ の傾きは，$-\dfrac{2-\cos\theta}{\sin\theta}$

法線 ℓ_θ の方程式は

$y-(2-\cos\theta)$

$$=-\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\{x-(2\theta-\sin\theta)\}$$

$$y=\frac{\cos\theta-2}{\sin\theta}(x-2\theta+\sin\theta)+2-\cos\theta$$

$$y=\frac{\cos\theta-2}{\sin\theta}x-\frac{2\theta(\cos\theta-2)}{\sin\theta}+\cos\theta-2$$

$+2-\cos\theta$

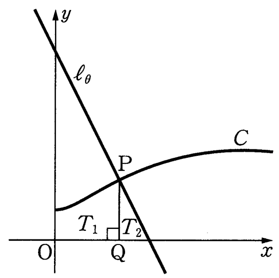
$$y=\frac{(\cos\theta-2)(x-2\theta)}{\sin\theta}$$

(2) ℓ_θ と x 軸との交点の x 座標は $x=2\theta$ であるから

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 2\theta\cdot\frac{(\cos\theta-2)\cdot(-2\theta)}{\sin\theta}$$

$$=\frac{2\theta^2(2-\cos\theta)}{\sin\theta}$$

(3) Pから x 軸に垂線PQをひき，C，x 軸，y 軸，線分PQで囲まれた図形の面積を T_1，PQと x 軸，直線 ℓ_θ で囲まれた図形の面積を T_2 とする。



$$T_1=\int_0^{2\theta-\sin\theta}y\,dx$$

$$=\int_0^{\theta}(2-\cos t)(2-\cos t)dt$$

$$=\int_0^{\theta}(4-4\cos t+\cos^2 t)dt$$

$$=\int_0^{\theta}\left(4-4\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$=\int_0^{\theta}\left(\frac{9}{2}-4\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt$$

$$=\left[\frac{9}{2}t-4\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\theta}$$

$$=\frac{9}{2}\theta-4\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$T_2=\frac{1}{2}\cdot\{2\theta-(2\theta-\sin\theta)\}\cdot(2-\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta(2-\cos\theta)$$

$$=\sin\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$=\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta$$

よって

$$T(\theta)=\frac{9}{2}\theta-4\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$+\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$=\frac{9}{2}\theta-3\sin\theta$$

(4) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{S(\theta)}$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{9}{2}\theta-3\sin\theta\right)\cdot\frac{\sin\theta}{2\theta^2(2-\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{3}{4}\left(3-\frac{2\sin\theta}{\theta}\right)\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{2-\cos\theta}$$

$$=\frac{3}{4}$$

STEP2

1 (1) $\dfrac{dx}{d\theta}=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=2\cos 2\theta+1$

(2) $-1\leqq x\leqq\sqrt{3}$，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

(3) 最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}$，最小値 0

(4) $I_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{1}{3}$，$I_2=\dfrac{1}{24}$，$I_3=2-\sqrt{3}$

(5) $\dfrac{4-\sqrt{3}}{3}$

解説 (1) $\dfrac{dx}{d\theta}=\sqrt{3}\cos\theta-(-\sin\theta)$

$=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$

$\dfrac{dy}{d\theta}=2\cos 2\theta+1$

(2) $x=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{\pi}{3}$

よって，$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに，$-1\leqq x\leqq\sqrt{3}$

また，$x=0$ のとき，$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

$\theta-\dfrac{\pi}{6}=0$

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

(3) $\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とすると，$\cos 2\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq 2\theta\leqq\pi$ より $2\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における y の増減表は次のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$

最大値は，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}$　$\left(\theta=\dfrac{\pi}{3}\right)$

最小値は，0　$(\theta=0)$

(4) $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$

$=\left[-\dfrac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{1}{3}$

$I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$

$=\left[\dfrac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=\dfrac{1}{24}$

I_3

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\theta(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta$

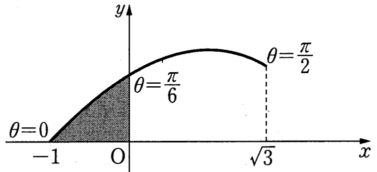
$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\theta\cdot 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)d\theta$

$=\left[-2\theta\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)d\theta$

$=2\left[\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=2-\sqrt{3}$

(5)



求める面積 S は

$S=\displaystyle\int_{-1}^{0}y\,dx$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin2\theta+\theta)(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\sin\theta\cos\theta+\theta)$

$\times(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta$

$=2\sqrt{3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta$

$+2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$

$+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\theta(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta$

$=2\sqrt{3}I_1+2I_2+I_3$

$=2\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{1}{3}\right)+2\cdot\dfrac{1}{24}+2-\sqrt{3}$

$=\dfrac{4-\sqrt{3}}{3}$

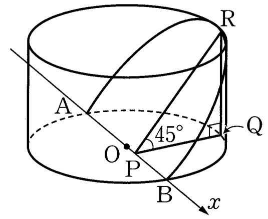
第29講　積分の応用(4)　—体積—

P.143〜P.144　類題

1　$\dfrac{2}{3}$

解説　下の図のように，底面の直径ABを含む直線を x 軸とし，底面の円の中心を原点とする。

x 軸に垂直な平面による図形の断面は，下の図の直角二等辺三角形PQRとなる。



OQ$=1$，OP$=|x|$ のとき

PQ$=\sqrt{1-x^2}$

RQ$=\sqrt{1-x^2}$

よって

$\triangle$PQR$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{1-x^2})^2=\dfrac{1-x^2}{2}$

ゆえに，求める体積は

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{2}dx$

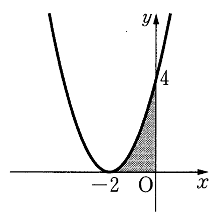
$=\displaystyle\int_0^1(1-x^2)\,dx$

$=\left[x-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1$

$=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

2　(1)　$\dfrac{32}{5}\pi$　　(2)　$\dfrac{8}{3}\pi$

解説 (1)　D は右の図で色のついた部分である。



よって

V_x

$=\pi\displaystyle\int_{-2}^{0}\{(x+2)^2\}^2dx$

$=\pi\displaystyle\int_{-2}^{0}(x+2)^4dx$

$=\pi\left[\dfrac{1}{5}(x+2)^5\right]_{-2}^{0}$

$=\dfrac{32}{5}\pi$

(2)　$y=(x+2)^2$ より

$x+2=\pm\sqrt{y}$

$x=-2\pm\sqrt{y}$

D の境界線は，$x=-2+\sqrt{y}$ より

$V_y=\pi\displaystyle\int_0^4(-2+\sqrt{y})^2dy$

$=\pi\displaystyle\int_0^4(4-4\sqrt{y}+y)\,dy$

$=\pi\left[4y-\dfrac{8}{3}y^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}y^2\right]_0^4$

$=\pi\left(16-\dfrac{8}{3}\cdot8+8\right)$

$=\dfrac{8}{3}\pi$

3　$\dfrac{3}{4}\pi^2$

解説　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，つねに $x+\sin2x\geqq x\geqq0$ であるから

$\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(x+\sin2x)^2-x^2\}\,dx$

$=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x\sin2x+\sin^2 2x)\,dx$

$=\pi\left[2x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\cos2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cdot\frac{1}{2}\cos2x\right)dx$

$+\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos4x}{2}dx$

$=-\pi\left[x\cos2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2x\,dx$

$+\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos4x)\,dx$

$=-\pi\left\{\dfrac{\pi}{2}\cdot(-1)\right\}+\pi\left[\dfrac{1}{2}\sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$+\dfrac{\pi}{2}\left[x-\dfrac{1}{4}\sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{\pi^2}{2}+\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

$=\dfrac{3}{4}\pi^2$

4　8π

解説　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ を変形して

$y^2=3-\dfrac{3}{4}x^2$

よって，求める体積は

$\pi\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(3-\frac{3}{4}x^2\right)dx$

$=2\pi\displaystyle\int_0^2\left(3-\frac{3}{4}x^2\right)dx$

$=2\pi\left[3x-\dfrac{x^3}{4}\right]_0^2$

$=2\pi(6-2)=8\pi$

P.145　演習問題

1　(1)　3　　(2)　e^3-e^2+1

解説 (1) $\int_{-1}^{2} x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}$

$$=\frac{1}{3}\{8-(-1)\}=3$$

(2) $\int_0^3 |e^x-e^2|\,dx$

$$=-\int_0^2 (e^x-e^2)\,dx+\int_2^3 (e^x-e^2)\,dx$$

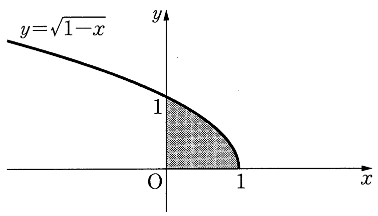
$$=-\left[e^x-e^2x\right]_0^2+\left[e^x-e^2x\right]_2^3$$

$$=-2(e^2-2e^2)+1+e^3-3e^2$$

$$=e^3-e^2+1$$

2 (1) $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ (2) $\boldsymbol{\frac{2}{15}\pi}$ (3) $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}(e^2-1)}$

解説 (1)

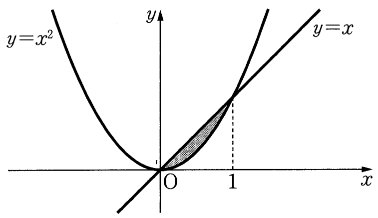


$$\pi\int_0^1 (\sqrt{1-x})^2\,dx=\pi\int_0^1 (1-x)\,dx$$

$$=\pi\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

(2) $x^2=x$ とすると，$x=0,\ 1$



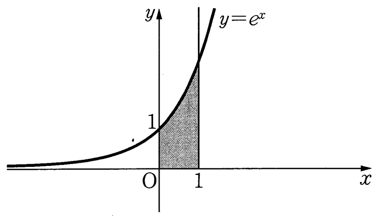
$$\pi\int_0^1 \{x^2-(x^2)^2\}\,dx$$

$$=\pi\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{15}\pi$$

(3)



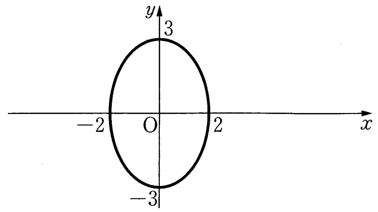
$$\pi\int_0^1 (e^x)^2\,dx=\pi\int_0^1 e^{2x}\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$$

3 (1) $\boldsymbol{24\pi}$ (2) $\boldsymbol{16\pi}$ (3) $\boldsymbol{36\pi^2}$

解説



(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ より，$y^2=9\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$

$$\pi\int_{-2}^{2} y^2\,dx=2\pi\int_0^2 9\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx$$

$$=18\pi\left[x-\frac{1}{12}x^3\right]_0^2$$

$$=18\pi\left(2-\frac{2}{3}\right)$$

$$=24\pi$$

(2) $x^2=4\left(1-\frac{y^2}{9}\right)$

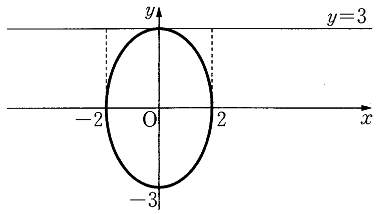
$$\pi\int_{-3}^{3} x^2\,dy=2\pi\int_0^3 4\left(1-\frac{y^2}{9}\right)dy$$

$$=8\pi\left[y-\frac{1}{27}y^3\right]_0^3$$

$$=8\pi(3-1)$$

$$=16\pi$$

(3)



$y=\pm 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ より，求める体積Vは

$$V=\pi\int_{-2}^{2}\left(3+3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^2dx$$

$$-\pi\int_{-2}^{2}\left(3-3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^2dx$$

$$=2\pi\int_0^2\left\{\left(3+3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^2-\left(3-3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^2\right\}dx$$

$$=36\pi\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ は半径 2 の円の $\frac{1}{4}$ の面積を表すから

$$36\pi\cdot 2^2\pi\cdot\frac{1}{4}=36\pi^2$$

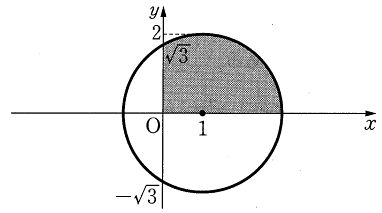
4 $\boldsymbol{\frac{16}{3}\pi^2+6\sqrt{3}\pi}$

解説 $(x-1)^2+y^2=4$ ……①

より，$x=1\pm\sqrt{4-y^2}$

y 軸との交点の y 座標は，①で $x=0$ とおいて

$$y=\pm\sqrt{3}$$



x 軸に関する対称性を考慮に入れると，求める体積は上の図で色のついた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積の 2 倍であるから，求める体積Vは

$$V$$

$$=2\pi\left\{\int_0^2 (1+\sqrt{4-y^2})^2\,dy-\int_{\sqrt{3}}^2 (1-\sqrt{4-y^2})^2\,dy\right\}$$

$$=2\pi\left\{\int_0^2 (1+2\sqrt{4-y^2}+4-y^2)\,dy-\int_{\sqrt{3}}^2 (1-2\sqrt{4-y^2}+4-y^2)\,dy\right\}$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}(5-y^2)\,dy+4\pi\int_0^2\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$+4\pi\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-y^2}\,dy$$

ここで

$$\int_0^{\sqrt{3}}(5-y^2)\,dy=\left[5y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=4\sqrt{3}$$

$\int_0^2\sqrt{4-y^2}\,dy$ は半径 2 の円の $\frac{1}{4}$ の面積を表すから

$$\int_0^2\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$=2^2\pi\cdot\frac{1}{4}=\pi$$

$\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-y^2}\,dy$ において，

$y=2\sin\theta$ とおくと，

y と θ の対応は右のようになる。

y	$\sqrt{3}\to 2$
θ	$\frac{\pi}{3}\to\frac{\pi}{2}$

$\frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta$ より

$$\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-y^2}\,dy=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(2+2\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\left[2\theta+\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

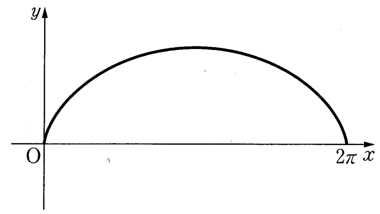
よって

$$V=8\sqrt{3}\pi+4\pi^2+4\pi\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{16}{3}\pi^2+6\sqrt{3}\pi$$

5 $\boldsymbol{5\pi^2}$

解説



$$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\to 2\pi$
θ	$0\to 2\pi$

よって，求める体積は

$$\pi\int_0^{2\pi}y^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\cdot(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3\,d\theta$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)\,d\theta$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}\left\{1-3\cos\theta+\frac{3}{2}(1+\cos 2\theta)-(1-\sin^2\theta)\cos\theta\right\}d\theta$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2}-4\cos\theta+\frac{3}{2}\cos 2\theta+\sin^2\theta\cos\theta\right)d\theta$$

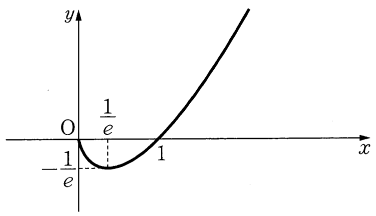
$$=\pi\left[\frac{5}{2}\theta-4\sin\theta+\frac{3}{4}\sin 2\theta+\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$=5\pi^2$$

P.146 **入試問題演習**

STEP 1

1 (1)



(2) $\frac{2}{27}\pi$

解説 (1) $x>0$ のとき，$f'(x)=\log x+1$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

よって，$f(x)$の増減表は上のようになり，グラフは解答のようになる。

(2) $x>0$ において，$f(x)=0$ となるのは，$x=1$ のときである。

求める体積は

$$\pi\int_0^1(x\log x)^2dx$$

$$=\pi\left\{\left[\frac{1}{3}x^3(\log x)^2\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}x^3\cdot2(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx\right\}$$

$$=-\frac{2}{3}\pi\int_0^1x^2\log x\,dx$$

$$=-\frac{2}{3}\pi\left\{\left[\frac{1}{3}x^3\log x\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx\right\}$$

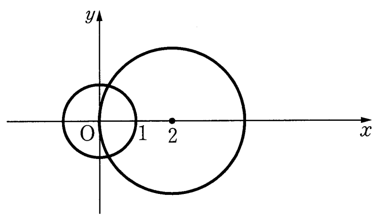
$$=\frac{2}{9}\pi\int_0^1x^2dx$$

$$=\frac{2}{9}\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{27}\pi$$

2 半径 $\frac{\sqrt{15}}{4}$，体積 $\frac{13}{24}\pi$

解説



半径1の円の中心を原点とし，半径2の円の中心が(2, 0)であるように座標軸をとると2つの円は

$x^2+y^2=1$ ……①

$(x-2)^2+y^2=4$ ……②

①−② より

$4x=1$

$x=\frac{1}{4}$

①に代入して

$y^2=\frac{15}{16}$

$y=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$

2つの球は①と②をx軸のまわりに1回転してできる図形であるから，交わりの円の半径は，$\frac{\sqrt{15}}{4}$である。

①より，$y^2=1-x^2$

②より，$y^2=4-(x-2)^2$

であるから，体積は

$$\pi\int_0^{\frac{1}{4}}\{4-(x-2)^2\}dx+\pi\int_{\frac{1}{4}}^1(1-x^2)dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{4}}(4x-x^2)dx+\pi\int_{\frac{1}{4}}^1(1-x^2)dx$$

$$=\pi\left[2x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{4}}+\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{4}}^1$$

$$=\pi\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{192}\right)+\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)-\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{192}\right)$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{13}{24}\pi$$

3 $\frac{81\sqrt{3}}{40}$

解説 $y=x^2-2x-1$ ……①

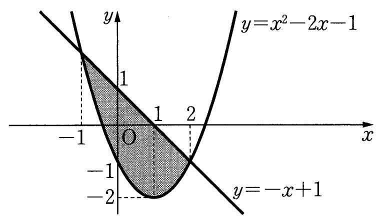
$y=-x+1$ ……②

①，②より

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

よって，①，②は$x=2$，-1で交わり，底面は下の図で色のついた部分のようになる。



x軸に垂直な平面による断面は，1辺の長さが

$(-x+1)-(x^2-2x-1)=-x^2+x+2$

の正三角形であるから，その面積は

$\frac{\sqrt{3}}{4}(-x^2+x+2)^2$

よって，求める体積は

$$\int_{-1}^2\frac{\sqrt{3}}{4}(-x^2+x+2)^2dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^2(x^4-2x^3-3x^2+4x+4)dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+4x\right]_{-1}^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(\frac{32}{5}-8-8+8+8\right)-\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+1+2-4\right)\right\}$$

$$=\frac{81\sqrt{3}}{40}$$

(参考)

$-x^2+x+2=-(x-2)(x+1)$ を利用して，次のように計算することもできる。

$$\int_{-1}^2\frac{\sqrt{3}}{4}(-x^2+x+2)^2dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^2(x-2)^2(x+1)^2dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^2\{(x+1)-3\}^2(x+1)^2dx$$

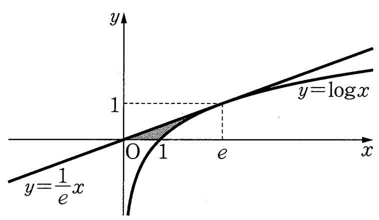
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^2\left\{(x+1)^4-6(x+1)^3+9(x+1)^2\right\}dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{5}(x+1)^5-\frac{3}{2}(x+1)^4+3(x+1)^3\right]_{-1}^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{243}{5}-\frac{243}{2}+81\right)$$

$$=\frac{81\sqrt{3}}{40}$$

4 (1)



(2) $\left(\frac{e^2}{6}-\frac{1}{2}\right)\pi$

解説 (1) $y=\log x$ より，$y'=\frac{1}{x}$

$x=t$ における接線は

$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)$ ……①

①が原点を通るとき

$-\log t=-1$

$t=e$

①に代入して，接線は，$y=\frac{1}{e}x$

したがって求める部分は解答のようになる。

(2) $y=\log x$ より，$x=e^y$

$y=\frac{1}{e}x$ より，$x=ey$

求める体積は

$$\pi\int_0^1(e^y)^2dy-\pi\int_0^1(ey)^2dy$$

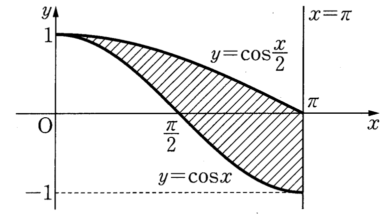
$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^1-\pi\left[\frac{1}{3}e^2y^3\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^2-1)-\frac{1}{3}e^2\pi$$

$$=\left(\frac{e^2}{6}-\frac{1}{2}\right)\pi$$

STEP 2

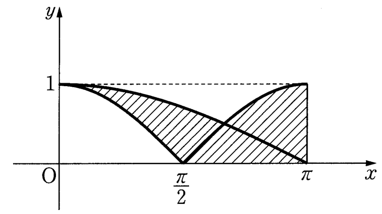
1 (1)



(2) $\frac{1}{4}\pi^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$

解説 (1) $y=\cos\frac{x}{2}$ のグラフは$y=\cos x$のグラフをx軸方向に2倍に拡大したものであるから，求める領域は解答のようになる。

(2) $y=\cos x$ の$y<0$の部分をx軸に関して対称に折り返すと，下の図のようになる。



$-\cos x=\cos\frac{x}{2}$

とおくと

$2\cos^2\frac{x}{2}-1=-\cos\frac{x}{2}$

$2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-1=0$

$\left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)\left(\cos\frac{x}{2}+1\right)=0$

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ より，$\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから，

$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$ より，$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}$

よって，$x=\frac{2}{3}\pi$

求める体積は

$$\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\cos^2\frac{x}{2}dx+\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx$$
$$-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\frac{1+\cos x}{2}dx+\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$
$$-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}(x+\sin x)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$+\pi\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$
$$-\pi\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\pi\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\pi\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\pi^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$$

第30講　積分の応用(5)　―曲線の長さと道のり―

P.148〜P.149　類題

1　(1)　$\mathbf{\frac{35\sqrt{15}}{3}}$

(2)　$\mathbf{10\pi}$

解説 (1)　$x=(2t+1)^{\frac{3}{2}}$，$y=(t+2)^{\frac{3}{2}}$ より

$$\frac{dx}{dt}=3(2t+1)^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{3}{2}(t+2)^{\frac{1}{2}}$$

であるから

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$=\sqrt{9(2t+1)+\frac{9}{4}(t+2)}$$
$$=\sqrt{\frac{9}{4}(9t+6)}=\frac{3}{2}\sqrt{3(3t+2)}$$

したがって，求める曲線の長さ L は

$$L=\int_1^6\frac{3}{2}\sqrt{3(3t+2)}\,dt$$
$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(3t+2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^6$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}(40\sqrt{5}-5\sqrt{5})=\frac{35\sqrt{15}}{3}$$

(2)　$x=3\sin\theta-4\cos\theta$，$y=4\sin\theta+3\cos\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=3\cos\theta+4\sin\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta}=4\cos\theta-3\sin\theta$$

であるから

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$$
$$=\sqrt{(3\cos\theta+4\sin\theta)^2+(4\cos\theta-3\sin\theta)^2}$$
$$=\sqrt{25(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$$
$$=5$$

したがって，求める曲線の長さ L は

$$L=\int_0^{2\pi}5d\theta=\left[5\theta\right]_0^{2\pi}=10\pi$$

2　(1)　$\mathbf{\frac{335}{27}}$

(2)　$\mathbf{\frac{22}{3}}$

解説 (1)　$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}(x+3)^{\frac{1}{2}}$ より

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}(x+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{9x+31}$$

したがって，求める曲線の長さ L は

$$L=\int_{-3}^2\frac{1}{2}\sqrt{9x+31}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{27}(9x+31)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^2$$
$$=\frac{1}{27}(343-8)$$
$$=\frac{335}{27}$$

(2)　$y=\frac{1}{3}\sqrt{x}(x-3)=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x^{-1}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{4}\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)\quad(4\leqq x\leqq 9)$$

したがって，求める曲線の長さ L は

$$L=\int_4^9\frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]_4^9$$
$$=\frac{1}{2}\left(18+6-\frac{16}{3}-4\right)$$
$$=10-\frac{8}{3}=\frac{22}{3}$$

3　(1)　$\mathbf{s=18}$，$\mathbf{l=54}$

(2)　$\mathbf{s=-\frac{28}{3}}$，$\mathbf{l=\frac{28}{3}}$

解説　$|t^2-9|=\begin{cases}t^2-9 & (t\leqq-3,\ 3\leqq t)\\ -t^2+9 & (-3\leqq t\leqq 3)\end{cases}$

(1)　$s=\int_0^6(t^2-9)dt$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-9t\right]_0^6=18$$
$$l=\int_0^6|t^2-9|dt$$
$$=\int_0^3(-t^2+9)dt+\int_3^6(t^2-9)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+9t\right]_0^3+\left[\frac{1}{3}t^3-9t\right]_3^6$$
$$=18+36$$
$$=54$$

(2)　$s=\int_1^3(t^2-9)dt$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-9t\right]_1^3=-\frac{28}{3}$$
$$l=\int_1^3|t^2-9|dt$$
$$=\int_1^3(-t^2+9)dt=\frac{28}{3}$$

4　$\mathbf{4\pi}$

解説　$x=2\sqrt{2}\cos t$，$y=\frac{1}{2}\sin 2t$ より

$$\frac{dx}{dt}=-2\sqrt{2}\sin t$$
$$\frac{dy}{dt}=\cos 2t=1-2\sin^2 t$$
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$=(-2\sqrt{2}\sin t)^2+(1-2\sin^2 t)^2$$
$$=4\sin^4 t+4\sin^2 t+1$$
$$=(2\sin^2 t+1)^2$$

よって

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=2\sin^2 t+1$$

であるから

$$l=\int_0^{2\pi}(2\sin^2 t+1)dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}+1\right)dt$$
$$=\int_0^{2\pi}(-\cos 2t+2)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\sin 2t+2t\right]_0^{2\pi}=4\pi$$

P.150　演習問題

1　(1)　$\mathbf{\sqrt{5}(1-e^{-\pi})}$

(2)　$\mathbf{\frac{3}{2}}$

解説 (1)　$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\cos t+e^{-\frac{t}{2}}(-\sin t)$

$$=e^{-\frac{t}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cos t-\sin t\right)$$
$$\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sin t+e^{-\frac{t}{2}}\cos t$$
$$=e^{-\frac{t}{2}}\left(-\frac{1}{2}\sin t+\cos t\right)$$

より

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$=e^{-t}\left(-\frac{1}{2}\cos t-\sin t\right)^2$$
$$+e^{-t}\left(-\frac{1}{2}\sin t+\cos t\right)^2$$
$$=e^{-t}\cdot\frac{5}{4}(\cos^2 t+\sin^2 t)$$

$=\dfrac{5}{4}e^{-t}$

よって

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{t}{2}}$

であるから，求める曲線の長さLは

$$L=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{t}{2}}dt$$
$$=\left[-\sqrt{5}e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^{2\pi}$$
$$=-\sqrt{5}(e^{-\pi}-1)$$
$$=\sqrt{5}(1-e^{-\pi})$$

(2) $x=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{2}{t}$ より

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}-\frac{2}{t^2}$$

また

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2}{t}$$

であるから

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{t^2}\right)^2+\left(\frac{2}{t}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2}{t^2}+\frac{4}{t^4}}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{t^2}\right)^2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{t^2}$$

よって，求める曲線の長さLは

$$L=\int_1^2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{t^2}\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t-\frac{2}{t}\right]_1^2=\frac{3}{2}$$

2 (1) $\boldsymbol{\dfrac{512-10\sqrt{10}}{27}}$

(2) $\boldsymbol{\log(\sqrt{2}+1)}$

解説 (1) $\dfrac{dy}{dx}=3(2x-1)^{\frac{1}{2}}$ より，求める曲線の長さLは

$$L=\int_1^4\sqrt{1+9(2x-1)}\,dx$$
$$=\int_1^4\sqrt{18x-8}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{27}(18x-8)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$
$$=\frac{512-10\sqrt{10}}{27}$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{-\sin x}{\cos x}=\tan x$ より，求める曲線の長さLは

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin^2x}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)\cos x\,dx$$

ここで，$\sin x=t$ とおくと

$$\frac{dt}{dx}=\cos x$$

x	$0\to\dfrac{\pi}{4}$
t	$0\to\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

であるから

$$L=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\log|1+t|-\log|1-t|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$
$$=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2$$
$$=\log(\sqrt{2}+1)$$

3 (1) $\boldsymbol{-\dfrac{3}{e}}$

(2) $\boldsymbol{\dfrac{6}{e}}$

解説 (1) 時刻 t における点Pの座標を $f(t)$ とおくと

$f'(t)=3(t-1)e^{-t}$, $f(0)=0$

であるから，$f(t)$ の増減は次のようになる。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	0	↘	極小	↗

よって，点Pの座標は $t=1$ のとき最小となる。

ここで

$$f(1)-f(0)=\int_0^1f'(t)dt$$

であるから，求める最小値は

$$f(1)=f(0)+\int_0^1f'(t)dt$$
$$=0+\int_0^13(t-1)e^{-t}dt$$
$$=3\left\{\Big[-(t-1)e^{-t}\Big]_0^1+\int_0^1e^{-t}dt\right\}$$
$$=3\left(-1+\Big[-e^{-t}\Big]_0^1\right)$$
$$=3\{-1+(-e^{-1}+1)\}$$
$$=-\frac{3}{e}$$

(2) a が十分大きいとき

$$l(a)=\int_0^a|3(t-1)e^{-t}|dt$$
$$=-\int_0^13(t-1)e^{-t}dt$$
$$+\int_1^a3(t-1)e^{-t}dt$$
$$=\frac{3}{e}+3\left\{\Big[-(t-1)e^{-t}\Big]_1^a+\int_1^ae^{-t}dt\right\}$$
$$=\frac{3}{e}+3\left\{-(a-1)e^{-a}+\Big[-e^{-t}\Big]_1^a\right\}$$
$$=\frac{3}{e}+3\{-(a-1)e^{-a}-e^{-a}+e^{-1}\}$$
$$=\frac{6}{e}-\frac{3a}{e^a}$$

したがって

$$\lim_{a\to\infty}l(a)=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{6}{e}-\frac{3a}{e^a}\right)$$
$$=\frac{6}{e}$$

4 (1) **24**

(2) $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

解説 (1) $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$ より

$$\frac{dx}{dt}=3(1-\cos t)$$
$$\frac{dy}{dt}=3\sin t$$
$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$=\sqrt{9(1-\cos t)^2+9\sin^2t}$$
$$=\sqrt{18(1-\cos t)}$$
$$=\sqrt{18\cdot2\sin^2\frac{t}{2}}$$
$$=6\left|\sin\frac{t}{2}\right|=6\sin\frac{t}{2}\quad(0\leqq t\leqq2\pi)$$

であるから，求める道のり l は

$$l=6\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt$$
$$=6\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$
$$=6(2+2)=24$$

(2) $x=\cos^3t$, $y=\sin^3t$ より

$$\frac{dx}{dt}=-3\cos^2t\sin t$$
$$\frac{dy}{dt}=3\sin^2t\cos t$$
$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$=\sqrt{9\cos^4t\sin^2t+9\sin^4t\cos^2t}$$
$$=\sqrt{9\sin^2t\cos^2t}$$
$$=3|\sin t\cos t|$$
$$=\frac{3}{2}|\sin2t|=\frac{3}{2}\sin2t\quad\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

であるから，求める道のりlは

$$l=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2t\,dt$$
$$=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

5 (1) $\boldsymbol{2\sqrt{1+x^2}}$

(2) $\boldsymbol{\sqrt{17}+\dfrac{1}{4}\log(\sqrt{17}+4)}$

解説 (1) $f(x)=x\sqrt{1+x^2}+\log(\sqrt{1+x^2}+x)$ より

$$f'(x)=\sqrt{1+x^2}+x\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\right)$$
$$=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2}$$
$$=2\sqrt{1+x^2}$$

(2) $y=x^2$ より，$y'=2x$ であるから，求める長さLは

$$L=\int_0^2\sqrt{1+(2x)^2}\,dx$$
$$=\int_0^2\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

ここで，(1)の $f(x)$ を用いると

$$L=\int_0^2\frac{1}{2}f'(2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}f(2x)\right]_0^2$$
$$=\frac{1}{4}\{f(4)-f(0)\}$$

(1)より

$f(4)=4\sqrt{17}+\log(\sqrt{17}+4)$

$f(0)=0$

したがって

$$L=\sqrt{17}+\frac{1}{4}\log(\sqrt{17}+4)$$

6 $\frac{\pi^3}{3}+\pi$

解説 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ に与えられた極方程式を代入すると

$$\begin{cases} x=(\theta^2-1)\cos\theta \\ y=(\theta^2-1)\sin\theta \end{cases}$$

となるから

$$\frac{dx}{d\theta}=2\theta\cos\theta-(\theta^2-1)\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=2\theta\sin\theta+(\theta^2-1)\cos\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$

$$=\{2\theta\cos\theta-(\theta^2-1)\sin\theta\}^2+\{2\theta\sin\theta+(\theta^2-1)\cos\theta\}^2$$

$$=\{(2\theta)^2+(\theta^2-1)^2\}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$=\theta^4+2\theta^2+1$$

$$=(\theta^2+1)^2$$

したがって，求める長さLは

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{(\theta^2+1)^2}\,d\theta=\int_0^{\pi}(\theta^2+1)\,d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{3}\theta^3+\theta\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi^3}{3}+\pi$$

P.151 入試問題演習

STEP 1

1 (1) **P(0, 1)**

(2) $\left(\log(s+\sqrt{s^2+1}),\ \sqrt{s^2+1}\right)$

(3) $\dfrac{dX}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$，$\dfrac{dY}{ds}=\dfrac{s}{\sqrt{s^2+1}}$

解説 (1) $e^x>0$，$e^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\geqq\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=1$$

等号が成り立つのは，$e^x=e^{-x}$ より，$x=0$ のときである。

したがって，y は$x=0$ のとき最小値1をとるから，求める点Pの座標は

P(0, 1)

(2) $y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ より

$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{e^{2x}}{4}+\frac{1}{2}+\frac{e^{-2x}}{4}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

であるから，$X>0$ において

$$s=\int_0^X\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$

$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^X$$

$$=\frac{e^X-e^{-X}}{2}$$

よって

$$s=\frac{e^X-e^{-X}}{2}$$

$$e^{2X}-2se^X-1=0$$

$$e^X=s\pm\sqrt{s^2+1}$$

$X>0$ より，$e^X>1$ であるから

$$e^X=s+\sqrt{s^2+1}$$

$$X=\log(s+\sqrt{s^2+1})$$

また，点A$(X,\ Y)$はC上の点であるから

$$Y=\frac{e^X+e^{-X}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(s+\sqrt{s^2+1}+\frac{1}{s+\sqrt{s^2+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(s+\sqrt{s^2+1}-s+\sqrt{s^2+1})$$

$$=\sqrt{s^2+1}$$

したがって

$$(X,\ Y)=(\log(s+\sqrt{s^2+1}),\ \sqrt{s^2+1})$$

(3) (2)の結果より

$$\frac{dX}{ds}=\frac{1}{s+\sqrt{s^2+1}}\cdot\left(1+\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{s+\sqrt{s^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{s^2+1}+s}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$\frac{dY}{ds}=\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$$

2 (1) **極小値0 ($x=1$)，極大値はない**

(2) $L(a)=\dfrac{3a^2+2a}{4}+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{2a+1}{a+1}$

(3) $\dfrac{3}{4}$

解説 (1) $f(x)=\dfrac{1}{4}(x^2-2\log x-1)$ より，$x>0$ で

$$f'(x)=\frac{1}{4}\left(2x-\frac{2}{x}\right)$$

$$=\frac{x^2-1}{2x}$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)}{2x}$$

よって，$f(x)$の増減は次の表のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

したがって，$f(x)$の極値は

極小値 0 ($x=1$)

極大値はない

(2) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ であるから，$x>0$ のとき

$$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

したがって，$a>0$ のとき

$$L(a)=\int_{a+1}^{2a+1}\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2+\log|x|\right]_{a+1}^{2a+1}$$

$$=\frac{1}{4}\{(2a+1)^2-(a+1)^2\}$$

$$+\frac{1}{2}\{\log(2a+1)-\log(a+1)\}$$

$$=\frac{3a^2+2a}{4}+\frac{1}{2}\log\frac{2a+1}{a+1}$$

(3) (2)より

$$\lim_{a\to\infty}\frac{L(a)}{a^2}=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{3+\frac{2}{a}}{4}+\frac{1}{2a^2}\log\frac{2+\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}\right)$$

$$=\frac{3}{4}$$

3 (1) $s(t)=-\dfrac{1}{4}(2t+1)e^{-2t}+\dfrac{1}{4}$

(2) $\dfrac{1}{4}$

解説 (1) 点Pは時刻$t=0$のとき原点を出発するから

$$s(t)=0+\int_0^t v(u)\,du$$

$$=\int_0^t ue^{-2u}du$$

$$=\left[-\frac{1}{2}ue^{-2u}\right]_0^t+\frac{1}{2}\int_0^t e^{-2u}du$$

$$=-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}\left[e^{-2u}\right]_0^t$$

$$=-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{4}(2t+1)e^{-2t}+\frac{1}{4}$$

(2) (1)より

$$\lim_{t\to\infty}s(t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{-\frac{1}{4}(2t+1)e^{-2t}+\frac{1}{4}\right\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{2t}{e^{2t}}+\frac{1}{e^{2t}}\right)+\frac{1}{4}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}$$

4 $\sqrt{2}(e^{4\pi}-1)$

解説 Pがx軸の正の部分にあるとき

$$\begin{cases} e^t\cos t-1>0 & \cdots\cdots① \\ e^t\sin t=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

$e^t>0$ であるから，②より

$\sin t=0$

$t=m\pi$ （mは整数）

さらに

$$\cos m\pi=\begin{cases} 1 & (m\text{が偶数}) \\ -1 & (m\text{が奇数}) \end{cases}$$

であり，$t>0$のとき，$e^t>1$ であるから，①より，mは正の偶数。

したがって，①，②を満たすtの値は

$t=2\pi$，4π，6π，…

となり，Pが2度目にx軸の正の部分に到達するのは，$t=4\pi$ のときである。

また

$$x'(t)=e^t\cos t+e^t(-\sin t)$$

$$=e^t(\cos t-\sin t)$$

$$y'(t)=e^t\sin t+e^t\cos t$$

$$=e^t(\sin t+\cos t)$$

$$\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}$$

$$=\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\sin t+\cos t)^2}$$

$$=\sqrt{e^{2t}(2\cos^2t+2\sin^2t)}$$

$$=\sqrt{2}e^t$$

であるから，求める道のり l は

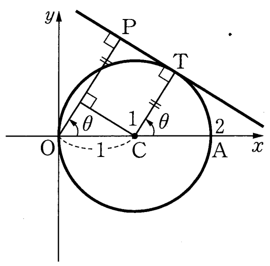
$$l=\int_0^{4\pi}\sqrt{2}e^tdt$$

$$=\sqrt{2}\left[e^t\right]_0^{4\pi}=\sqrt{2}(e^{4\pi}-1)$$

STEP 2

1 8

解説



上の図のように，円の中心をC(1, 0)とし，CTがx軸の正の部分となす角をθ $(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$とすると

$$\mathrm{OP}=1+\cos\theta$$

であるから，Pの座標はθを用いて

$$\mathrm{P}((1+\cos\theta)\cos\theta,\ (1+\cos\theta)\sin\theta)$$

と表せる。

$$\begin{cases} x=(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)$$
$$=-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta$$
$$=-\sin\theta-\sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=-\sin\theta\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta$$
$$=\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=\cos\theta+\cos 2\theta$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$$
$$=\sqrt{(-\sin\theta-\sin 2\theta)^2+(\cos\theta+\cos 2\theta)^2}$$
$$=\sqrt{2+2(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)}$$
$$=\sqrt{2+2\cos(2\theta-\theta)}$$
$$=\sqrt{2(1+\cos\theta)}$$
$$=\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta}{2}\quad(-\pi\leqq\theta\leqq\pi)$$

であるから，求める曲線の長さLは

$$L=2\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$
$$=2\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=8$$